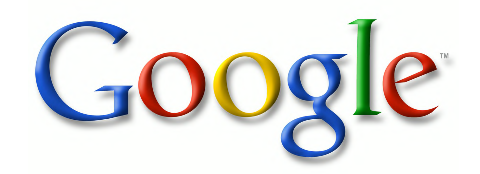
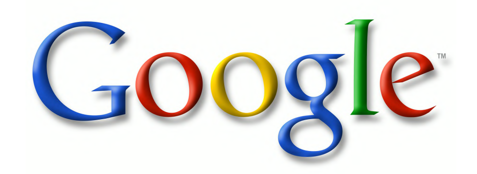
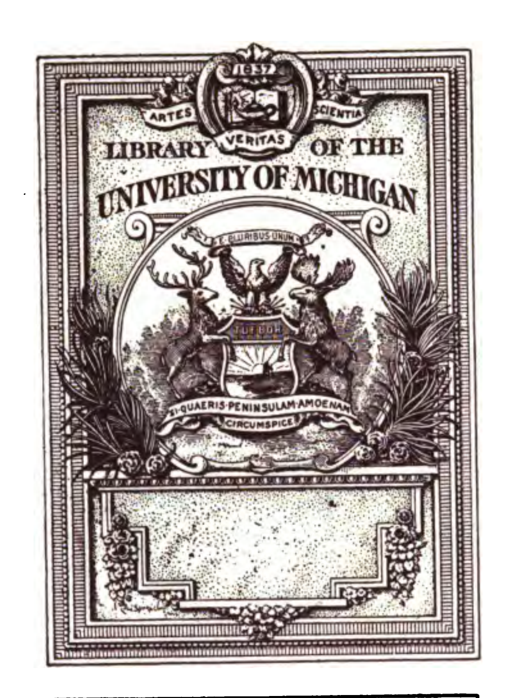





1837
ARTES
SCIENTIA
VERITAS
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
E PLURIBUS UNUM
TUEBOR
SI QUAERIS PENINSULAM AMOENAM
CIRCUMSPICE

Alexander Ziwet

DEFINITION UND EXPERIMENTELLE BESTIMMUNG

EINER NEUEN

KONSTANTEN DER ELASTICITÄTSTHEORIE.

NACHWEIS DES BEDÜRFNISSES NACH EINER SOLCHEN,

KORREKTUR DES ELASTICITÄTSMODULS DURCH DIESELBE.

INAUGURALDISSERTATION

ZUR ERLANGUNG DER DOCTORWÜRDE

EINER HOHEN PHILOSOPHISCHEN FACULTÄT

DER UNIVERSITÄT LEIPZIG

VORGELEGT VON

HERMANN TAMMEN.

MIT EINER TAFEL.

DRUCK VON B. G. TEUBNER IN LEIPZIG.

1881.

SEINEN

LIEBEN ELTERN

IN

DANKBARER VEREHRUNG

DARGEBRACHT

VOM VERFASSER.

Croire tout découvert est une erreur profonde,
C'est prendre l'horizon pour les bornes du monde.

Die Entwickelung der Naturforschung. Das Interesse des Menschen an den Vorgängen in der Natur wurde ohne Zweifel zuerst lebhaft angefacht durch die Notwendigkeit, sich gegen die Naturgewalten zu schützen, und sobald dies einigermassen durch Kleidung, feste Wohnsitze etc. gelungen war, durch das Verlangen, sich die in der Natur in unerschöpflicher Fülle waltenden Kräfte zur Verschönerung des eigenen Daseins dienstbar zu machen. So ergiebt sich also zunächst ein praktisches Interesse, und dieses klebt an den Einzelvorgängen. Nach Sicherung einer hinreichend behaglichen Existenz entsteht jedoch neben dem praktischen ein rein intellectuelles Interesse, welches um so leichter die Oberhand über das erstere gewinnt, je mehr sich die Idee eines Kosmos, eines geordneten Weltganzen ausgebildet hat. Bis hierher war der Entwickelungsgang der Naturwissenschaften fortgeschritten zur Blütezeit des griechischen Lebens. Die einzige exacte Wissenschaft ist noch die Geometrie; im übrigen manifestirt sich das Interesse an den Vorgängen in der Natur nur in den philosophischen Weltanschauungen.

Eine wechselseitige Unterstützung der praktischen und der theoretischen Naturforschung ist bis jetzt noch unmöglich. Denn allgemeine Principien aufzudecken, welche aus dem der Sinne Schranken entrückten Reiche des Idealen hervorgehen, und doch auf die Naturvorgänge anwendbar sind, weil aus ihnen in versteckter Quelle entsprungen, ist offenbar erst dann möglich, wenn die Detailforschung dem Geiste hinlänglichen Reichtum an Er-

fahrungen zugeführt und dieser dieselben sich so vollkommen zu eigen gemacht hat, dass die Erinnerung der Mühen des Erwerbens den angemessenen Gebrauch des Reichtums nicht mehr hemmt. Die Periode der Aufdeckung allgemeiner mit den Vorgängen in der Natur wirklich congruirenden Principien beginnt bald nach dem Aufblühen der Künste und Wissenschaften im Zeitalter der Reformation.

Bei den Griechen war die Summe der Einzelkenntnisse viel zu gering und der Flügelschlag der Speculation zu gewaltig, als dass ein Bündnis mit gegenseitiger Anerkennung möglich gewesen wäre. Die intellectuelle Bildung kann nicht wie die ethische in ihrer Gesammtheit auf Fremde wirken; die kosmologischen Systeme der Griechen waren orientalischen wie occidentalischen Barbaren notwendig unverständlich, da sie das Facit eines langen, von vielen dem Griechentum eigentümlichen Factoren abhängigen Bildungsprocesses darstellen. Im Ringen mit fremdem Geiste pflegen vorzugsweise Einzelkenntnisse genützt und geschätzt zu werden. Für die Geschichte der Naturforschung ist deshalb zuerst hellglänzend die alexandrinische Schule, und dunkel ist nicht einmal das wegen seiner Intoleranz unleidliche Mittelalter; auch dieses hat viel, in der von andern Interessen geleiteten Historiographie freilich nicht gewürdigtes, Beobachtungsmaterial geliefert und zu Anschauungen verarbeitet, welche von den grossen Männern am Beginne der Neuzeit benutzt wurden. Es ist nicht möglich mit einiger Bestimmtheit anzugeben, welchen Urhebern die Principien: causa aequat effectum, actio et reactio semper sunt aequales, ex nihilo nihil, in nihilum nil posse reverti zuzuschreiben sind; man muss sich begnügen zu wissen, wer zuerst ihre Fruchtbarkeit durch Anwendung gezeigt hat. Aber sicher ist, dass diese Principien, wenngleich sie erst im 17. Jahrhundert Frucht zu tragen anfingen, bereits dem Geiste der Zeit des 16. Jahrhunderts angehören, dass sie gewonnen sind im Kampfe gegen die Lehren des Aristoteles und der Scholastik.*)

*) Es ist historisch falsch, diese Principien der Scholastik zuzuschreiben, wie Tait in seinen „Vorlesungen über einige neuere Fortschritte der Physik" thut; denn die Scholastik verfocht diametral entgegengesetzte Lehren. Es ist mir aber ganz unverständlich, wie Tait in demselben Werk (autorisirte Übersetzung von Wertheim, pag. 47) sagen kann: „In dem einen: causa aequat effectum habe ich niemals einen Sinn finden können; der zweite

Das beste Beispiel für ein erfolgreiches Streben nach Behandlung specieller Probleme auf Grund möglichst allgemeiner Methoden und Principien bietet Descartes' analytische Geometrie; denn während die griechischen Geometer bei all ihrem eminenten Scharfsinn nur den synthetisch fortschreitenden Entwickelungsgang mit enger Begrenzung der Begriffe kannten, weshalb sie die sämmtlichen denkbaren oft sehr zahlreichen Fälle einer Aufgabe von einander unabhängig alle mit derselben Ausführlichkeit erledigen mussten, erlaubt die Descartes'sche Methode zuerst die geometrischen Aufgaben in principieller Allgemeinheit zu behandeln; und der Erfolg ist eine Fülle neuer Sätze, neuer Principien, neuer Probleme (s. H. Hankel, die Entwickelung der Mathematik im letzten Jahrhundert. Tübingen 1869).

Nicht so glücklich war Descartes in seinen Versuchen zur Neubegründung der Physik. Nicht sein Erhaltungsprincip ist für die Fortentwickelung der Physik massgebend gewesen, sondern das Princip von der Erhaltung der Energie oder Arbeit, von Anfang an wie jetzt noch oft als Princip von der Erhaltung der Kraft angesprochen. Von Huyghens, Leibniz, Bernoulli aus der Taufe gehoben, hat doch die s. g. lebendige Kraft erst durch Vermittelung des Gravitationsgesetzes sich in Beziehung gesetzt zu der Energie der Lage und dadurch die wissenschaftliche *Mechanik* entstehen lassen, der sich seitdem die reichsten Gebiete der Physik unterwarfen. Dieselbe Lehre von der allgemeinen Gravitation hat auch die Chemie in richtige Bahnen gelenkt, indem sie Lavoisier in den Stand setzte, eine klare und präcise Definition der Materie zu geben und dadurch diesen Begriff für die wissenschaftliche Anwendung brauchbar zu machen. Zwei Principien von universeller Bedeutung sind so das Ergebnis

(Grundsatz für die von J. R. Mayer in Heilbronn angestellten Betrachtungen) ist: ex nihilo nihil fit. Diese Sätze können als Grundlagen scholastischer Untersuchungen dienen, wie der berühmten alten Frage nach der Anzahl der Engel, welche auf einer Nadelspitze tanzen können, aber sie sind durchaus nicht geeignet, in *irgend einer* Form in physikalische Untersuchungen eingeführt zu werden". Es hat doch gerade Newton, dessen Verdienste Tait sonst anerkennt, den Satz actio et reactio semper sunt aequales durch Einführung der fernewirkenden Kräfte (Bewegungsursachen) zur unbestrittenen Geltung gebracht, und dieser Satz ist *die speciellste Form* des „causa aequat effectum", indem man die actio oder reactio, ganz wie man will, als Ursache oder Wirkung auffassen kann.

der zunächst durch praktisches Interesse angeregten hingebendsten Naturbeobachtung und der damit vereinten Speculation, zwei Erhaltungsprincipien, aus einer Wurzel entsprossen und durch sie hinleitend auf den Keimsatz: ex nihilo nihil fit, welcher durch die in der Lehre von der allgemeinen Gravitation concentrirte Erfahrung befruchtet wurde. Die Materie und die an ihr haftende Energie können aus der Welt der Erscheinungen nicht entschlüpfen, so proteusähnlich auch beide erfunden werden mögen; beide haben reale Existenz, weil sie weder entstehen noch vergehen können.

Das Descartes'sche Princip von der Erhaltung der Kraft bedurfte erst einer bedeutenden Korrektur, bevor es dem Galilei'schen Kraftbegriffe $p = m \frac{dv}{dt}$ eine Stütze bieten konnte gegen Angriffe von Männern wie Bernoulli, d'Alembert, Kirchhoff. Obgleich aber die Angriffe gegen den Kraftbegriff dessen mathematische Verwertung in nichts gestört haben, so erscheint mir die Skepsis doch ganz natürlich mit Rücksicht auf folgende Blumenlese von Bezeichnungen, welche Leibniz und die Philosophen der Wolf'schen Schule für Kräfte in Vorrat hatten. Es kommen vor: vires vivae, mortuae, insitae, acceleratrices, indifferentes, consentientes, disiunctae, coincidentes, dissentientes, repugnantes, parallelae, mixtae, purae etc. und daneben actio, potentia, pressio, sollicitatio, impetus, conatus, impactus etc. Es ist merkwürdig, welche Bedeutungen noch jetzt in das Wort Kraft hineingelegt werden; selbst in guten Arbeiten über naturwissenschaftliche Fragen findet man noch die Neigung thätig, die Kraft zu einer Stoffeigenschaft zu machen, und am aller hartnäckigsten wird die Ansicht festgehalten, dass der Kraft notwendig die Eigenschaft der Unzerstörbarkeit zukomme. Deshalb zeigt die heutige Skepsis unverkennbar die Neigung, die Kraft durch das Potential zu ersetzen. J. R. Mayer, welcher 1842 in einer in Liebigs Ann. erschienenen Abhandlung das Leibniz'sche Princip durch Entwickelung der Transformationsidee seiner Vollendung entgegenführte, denkt sich die Kräfte als unzerstörliche, wandelbare, imponderable Objecte, oder er definirt die Kraft auch als *räumliche Differenz* ponderabler Objecte.

Kraft ist Bewegungsursache. Man sieht für Bewegungen in der Atmosphäre die Ursache in Druckdifferenzen; es liegt nahe,

dementsprechend in Potentialdifferenzen Bewegungsursachen zu erblicken.

J. R. Mayer mag nicht ablassen, von einem Kräfteverbrauch zu reden, und wünscht deshalb mit Rücksicht auf die allgemeine Gravitation zur Definition der „Kraft" die Gleichung:

1) $$\frac{m}{2} v^2 + \frac{m_1}{2} v_1^2 = \frac{m m_1}{r_1} - \frac{m m_1}{r} = \frac{m m_1 (r - r_1)}{r r_1}$$

einzuführen an Stelle der Gleichung:

2) $$k = \frac{m m_1}{r^2},$$

welche aus 1) resultirt *für den Specialfall* $r = r_1$, wenn man mit Hülfe von nur der höhern Mathematik eigentümlichen Methoden den Factor $r - r_1 = 0$ für $r = r_1$ vermeidet. Hierbei bezeichnen m und m_1 die beiden Massen, v und v_1 ihre erlangten Geschwindigkeiten, r und r_1 die Entfernungen resp. vor und nach der betrachteten Kräftewirkung, k die in jedem Moment wirkende Druckkraft.

Eine so sich andeutende Verdrängung des Galilei'schen Kraftbegriffs durch das Potential ist vielleicht möglich, da der eine Begriff sowohl wie der andere nur Hülfsbegriff ist, da beide stets zu Gunsten des Energiebegriffs wieder eliminirt werden. Fasst man das Potential als Bewegungsantrieb, wie C. Neumann in seiner Elektrodynamik*), so ist die Gleichartigkeit mit dem Kraftbegriff hergestellt, es liegt aber auch am Tage, wie z. B. bei der Betrachtung der Bewegung eines geschlossenen Leiters in der Nähe eines stromführenden Leiters das Potential sowie die ponderomotorische Kraft Variable darstellen, welche beide zur Berechnung der inducirten elektromotorischen Kraft benutzt werden können, um alsdann dem Energiebegriff Platz zu machen. Die letzten Betrachtungen in der Mechanik und in der Infinitesimalrechnung haben gemein, dass man in ihnen nicht mit fertigen, gegebenen Grössen operirt, sondern mit entstehenden, so jedoch, dass der Gebrauch des Unendlichkleinen vermieden wird. Newton bezeichnet als das erste der beiden Fundamentalprobleme seiner Fluxionsrechnung: Wenn die Länge eines beschriebenen Raumes für jeden Zeitpunkt gegeben ist, die Geschwindigkeit der Bewegung für jeden Zeitpunkt zu finden. Ein Problem derselben

*) C. Neumann, die elektrischen Kräfte. Leipzig 1873. I.

Art ist folgendes: Wenn die Geschwindigkeit der Bewegung für jeden Zeitpunkt gegeben ist, die Beschleunigung, oder die beschleunigende Kraft für jeden Zeitpunkt zu finden. Der in die Differentialrechnung eingeführte Quotient entstehender Grössen ist doch nur eine Hülfsfunction oder ein Hülfsbegriff, dessen reale Bedeutung in sensu rigoroso ac metaphysico nachzuweisen Leibniz gewiss mit Recht nicht versuchte; diesem mathematischen *Hülfsbegriffe* entspricht aber in der Mechanik der Begriff „Kraft“ vollkommen.

Es dürfte sich deshalb empfehlen, für den Begriff Kraft in der Mechanik eine eigene Bezeichnung zu wählen, wie man analog für den Begriff Arbeit in der Mechanik die Bezeichnung Energie gewählt hat, um im Ausdruck nicht behindert zu sein, wenn man z. B. erklärt, wie ein Bergwanderer beim Abstieg Arbeit leistet aber Energie aufnimmt (s. G. Hirn, Wärmetheorie, II), wie die Pflanze Arbeit leistet, indem sie ihre Blätter in horizontaler Lage erhält, und doch keine Energie verausgabt. Der Kraftbegriff der mathematischen Physik steht aber in engster Beziehung zu dem korrigirten Descartes'schen Erhaltungsprincip, welches lautet: wenn man, was stets möglich ist, der Betrachtung ein Massensystem von solcher Grösse zu Grunde legt, dass sich die Wirkungen aller in Betracht gezogenen Kräfte vollständig innerhalb des Systems halten, weil dieselben Angriffs- wie Ausgangspunkt in Massenteilchen des Systems haben, so giebt die algebraische Bewegungssumme nur an, was man an Bewegungsgrössen von den im Systeme vorhandenen Bewegungsgrössen ohne jede Änderung der untersuchten Erscheinungen absondern kann; denn für die Vorgänge im System ist es offenbar gleichgültig, welche Bewegung des Gesammtsystems, oder des Massenmittelpunktes gegen einen absolut im Raume festen Körper Alpha stattfindet. Nach der Korrektur ist also das Descartes'sche Princip, das Fundament des Satzes vom Massenmittelpunkt, nur noch eine Erweiterung des Galilei'schen Trägheitsgesetzes, welche sehr nahe liegt; denn wenn sich ein Körper während seiner Progressivbewegung ausdehnt, weil sich in ihm Wärme entwickelt, so wird niemand darin einen Grund zur Verzögerung oder Beschleunigung der Progressivbewegung erkennen wollen. In dieser Weise folgt Descartes auf Galilei.

Wenn es nun auch in der Vorrede zum Werke des Copernikus



(s. C. Neumann, Antrittsvorlesung zu Leipzig) mit Recht heisst: „Neque enim necesse est, eas hypotheses esse veras, imo ne verisimiles quidem, sed sufficit hoc unum, si calculum observationibus congruentem exhibeant", so bleibt doch trotz aller Congruenz der Rechnung mit der Erfahrung die Rückführung der Principien auf eine möglichst geringe Zahl geboten, schon zur richtigen Wertschätzung der einzelnen.

Die Möglichkeit einer Rückführung des Descartes'schen Princips auf das Leibniz'sche lässt sich aber leicht nachweisen. Man kann mit Hülfe der Gleichungen des Massenmittelpunktes die Energiesumme eines beliebigen Systems sofort in zwei Summen zerlegen, in:

$$\frac{1}{2}\sum m\left\{\left(\frac{d\bar{x}}{dt}\right)^2+\left(\frac{d\bar{y}}{dt}\right)^2+\left(\frac{d\bar{z}}{dt}\right)^2\right\}+$$
$$\frac{1}{2}\sum m\left\{\left(\frac{d\xi}{dt}\right)^2+\left(\frac{d\eta}{dt}\right)^2+\left(\frac{d\zeta}{dt}\right)^2\right\},$$

wobei beide Summationen über alle Massenteilchen des Systems auszudehnen sind, wenn $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$ die Coordinaten des Massenmittelpunktes in Bezug auf den festen Körper Alpha, ξ, η, ζ die Coordinaten irgend eines Massenteilchens m des Systems in Beziehung auf den Massenmittelpunkt bezeichnen. Der Satz vom Massenmittelpunkt ergiebt sich als eine Umkehrung dieses Satzes. Demnach muss das Problem, die Energiesumme eines Systems so in zwei Summen zu zerlegen, dass die eine die äussere, die andere die innere Energie des Systems darstellt, zum Satze vom Massenmittelpunkt hinführen, d. h. es müssen sich die Gleichungen ergeben:

$$\sum m\frac{d\xi}{dt}=\sum m\frac{d\eta}{dt}=\sum m\frac{d\zeta}{dt}=0$$
$$\sum m\frac{d\bar{x}}{dt}=A;\quad \sum m\frac{d\bar{y}}{dt}=B;\quad \sum m\frac{d\bar{z}}{dt}=\Gamma,$$

wobei A, B, Γ Konstante bezeichnen.

In ganz gleicher Stellung wie der Satz vom Massenmittelpunkte befindet sich der Flächensatz zu unserm obersten Princip, dem Princip von der Erhaltung der Energie. Dies tritt schon in folgenden Formulirungen hervor:

Satz vom Massenmittelpunkt. Die algebraische Bewegungssumme ist unabhängig von der Wirkung innerer Kräfte.

Flächensatz. Die algebraische Flächensumme, oder was auf

dasselbe hinauskommt, die algebraische Summe der Rotationsmomente ist von der Wirkung innerer Kräfte unabhängig.*)

Also nicht nur die Principien von der Erhaltung der Energie und der Materie, sondern auch die diesen zunächst untergeordneten Hülfsprincipien, welche mathematisch formulirt nur dazu dienen, die eigentliche Natur der Kräftewirkung mehr und mehr klar zu stellen, documentiren sich als Erhaltungsprincipien.

Bestimmung von Konstanten im Sinne des Erhaltungsprincips. Nach diesen vorläufigen Erörterungen kann über die Art solcher Bestimmungen kaum noch ein Zweifel bestehen. Wir müssen der Materie wie der Energie in ihren Wandlungen nachspüren, und da ein absolutes Verschwinden nicht möglich ist, so kann es sich in den Wandlungen beider nur um Kreisprocesse handeln. Eine Sonderung der so präcisirten Aufgaben für Physik und Chemie kann man aber wohl in der Weise vornehmen, dass man der Physik den Kreislauf der Arbeit, der Chemie den Kreislauf der Materie zuweist. Von Seiten der englischen Naturphilosophie ist allerdings an der Hand der Lehre Thomson's, dass die Energien die niedrigste Form anzunehmen streben, eine Bestimmung der Aufgaben für die Naturforschung in etwas anderer Richtung angebahnt, als ich soeben ins Auge fasste.**) Bei

*) Lagrange sagt in seiner Méc. anal. Tom. I, part II, sect. III, art. 8 über die Gleichungen, welche den Flächensatz enthalten: „Et il est bon de remarquer, que ces équations ont toujours lieu bien indépendamment de l'action mutuelle des corps de quelque manière que cette action puisse s'exercer, même par le choc mutuel des corps du système". Die in art. 3 hierfür gegebene Begründung befriedigt mich nicht ganz. Da ich nun im Folgenden den Flächensatz anwende, so beabsichtigte ich in einem Anhange diesen Punkt eingehender zu erörtern. Wegen Mangel an Platz muss ich diesen Anhang weglassen, was mir um so leichter wird, da der Gegenstand mich über das ursprüngliche Ziel hinausführte und in einer demnächst zu vollendenden kleinen Arbeit über die Principien der Mechanik den richtigen Platz findet.

**) Tait bezeichnet a. f. a. O. die citirte Lehre Thomson's als die wichtigste Entdeckung, welche die Wissenschaft jemals gemacht habe, da sie die wunderbarste Beziehung zur Zukunft der ganzen sichtbaren Welt enthalte. Erinnert man sich nun, dass die Alchymisten, die Naturforscher der Scholastik, die Gewinnung des Bleis aus dem Bleiglanz als eine Veredlung des Bleiglanzes zu Blei erklärten, so liegt die Frage nahe, wer denn der Scholastik näher stehe, Mayer oder Tait? (s. Anm. p. 6). Wenn Energien veredelt oder erniedrigt werden, weshalb nicht auch Substanzen? Aber in der Natur giebt es keine Rangordnung!

Thomson und Tait prädominirt das Interesse an den Fragen nach Ursprung und Ende des Weltalls. Die Beantwortung dieser Fragen wird aber wohl nach Tausenden von Jahren so unmöglich sein wie jetzt. Denn bei solchen Lehren, wie die erwähnte Thomson's, ist der Beweis notwendig unsicher.

Gehen von einem Körper irgend welche Fernewirkungen aus, so breitet sich stets der entsendete Impuls so über den Raum aus, dass auf allen um den Körper construirbaren concentrischen Kugelschalen die Summe der wirksamen Energie dieselbe ist, falls nicht ein durch irgend einen Körper gewissermassen aus den nähern Kugeloberflächen herausgeschnittenes Stück seinen Schatten wirft. Alsdann aber findet man stets in dem schattenwerfenden Körper den in Ausfall geratenen Bruchteil der Energie getreulich aufgefangen. Den nicht durchgelassenen oder gleich in derselben Form wieder reflectirten Teil der empfangenen Energie behält der Körper in transformirter Gestalt, bis eine Fortleitung eintritt. *Der Bruchteil aber der von einem Körper in der Massen- und Zeiteinheit unter bestimmten Einflüssen in bestimmter Weise transformirten Energie ist eine für die Substanz des Körpers charakteristische Konstante.*

In der Nähe einer konstanten Wärmequelle befinde sich ein eiserner Schirm. Derselbe wird kurze Zeit, nachdem er seinen Platz eingenommen hat, sich noch gegen die Wärmequelle verhalten wie ein schattenwerfender Körper gegen eine Lichtquelle. Sobald er jedoch die seiner Entfernung von der Wärmequelle entsprechende Temperatur angenommen hat, hört er auf Wärmeschatten zu bilden. Nähert man ihn in diesem Zustande der Wärmequelle, so entsteht wieder an der von der Wärmequelle abgewendeten Seite relative Abkühlung, Schatten, entfernt man ihn dagegen von der Wärmequelle, so strahlt er seinerseits Wärme aus. Eine Bewegung im Kreise um die Wärmequelle als Mittelpunkt bewirkt keine Änderung im Verhalten des Schirms gegen seine Umgebung. Gleiches Verhalten zeigen Körper einer Kältequelle gegenüber, fluorescirende Substanzen gegen gewisse Wellenlängen des Lichtes, ja der Spektralanalyse ist dasselbe Erklärungsprincip eigen, welches über die Wirkung eines Ofenschirms Klarheit giebt; denn das Absorptionsspektrum erklärt man als entstanden durch leuchtende feste oder flüssige Körper, welche von einer weniger hellen Gashülle umgeben sind. Die

dunkeln Linien entstehen nämlich an den Stellen, an welchen das Spektrum des Gases, wenn dieses selbstleuchtend ist, helle Linien enthalten würde. Die Gashülle absorbirt Licht von einer gewissen Wellenlänge. Rücke ich den hinter der Gashülle leuchtenden Körper plötzlich in unendliche Ferne, nehme ihn also weg, so sendet das Gas die Schwingungen aus, welche es früher absorbirte, wie der Ofenschirm, den man vom Ofen wegstellt.

Die soeben erläuterte Anschauung ist der leitende Faden bei fast allen Erklärungen physikalischer Vorgänge. Mit den elektrischen und magnetischen Fluidis arbeitet jetzt kein Forscher mehr mit wahrer Ueberzeugung. Man hat sich auch hier schon zur obigen Anschauung bekehren müssen. Wenn ein absolut frei beweglicher geschlossener Leiter in der Nähe eines stromführenden Leiters bewegt wird, so findet diese Bewegung im allgemeinen einen gewissen Widerstand, welcher von dem stromführenden Leiter ausgeht. Es wird also bei der Bewegung eine gewisse Arbeit verbraucht, welche nicht auf Reibung und Luftwiderstand zurückzuführen ist; und diese Arbeitsgrösse ist nach F. Neumann die elektromotorische Kraft, welche während der Bewegung von dem stromführenden Leiter in dem bewegten Leiter inducirt ist.*) Es ist aber auch der geschlossene Leiter während seiner Bewegung aus einem Orte geringerer Wirkung, kleineren Potentials, in einen solchen grösseren Potentials gekommen, oder umgekehrt. Wenn das Potential während der Bewegung unverändert bleibt, so findet keine Induction statt, und das Vorzeichen der inducirten Elektricität ist von dem Vorzeichen der Potentialdifferenz abhängig. Der geschlossene Leiter, für den ich auch einen Metallklumpen setzen kann, verhält sich also gegen den stromführenden Leiter genau ebenso wie der vorhin betrachtete Schirm gegen die Wärmequelle, indem an die Stelle

*) F. Neumann gab diese Definition für die elektromotorische Kraft im Jahre 1845 jedenfalls ohne Anregung durch die Arbeit von J. R. Mayer vom Jahre 1842; denn es wird nicht nur in der betreffenden Arbeit J. R. Mayer nirgends erwähnt, sondern es scheint sogar bis jetzt noch unbeachtet geblieben zu sein, dass die Lehre von der Transformation der Arbeit in Elektricität nicht durch Vermittelung der chemischen Energie, sondern vermöge der von F. Neumann gegebenen Definition ganz parallel mit der Lehre von der Transformation der Arbeit in Wärme und unabhängig von dieser aufgewachsen ist. Die Definition von F. Neumann zeigt den Weg zu einem mechanischen Elektricitätsäquivalent.

der Temperaturdifferenz zwischen dem Schirm und der etwa sich ihm nähernden Hand die elektromotorische Kraft getreten ist. Dieser Analogie ist vollkommen Rechnung getragen in der Elektricitätstheorie von W. Hankel (Pogg. Ann., Bd. 126, p. 440 und Bd. 131, p. 707), und es scheint mir deshalb die Einfachheit bemerkenswert, mit welcher diese Theorie zum F. Neumann'schen Potential und zum H. Grassmann'schen Elementargesetz hinleitet, indem sie naturgemäss zur festen Fundirung des Hauptpfeilers der logischen Brücke zwischen Elektrostatik und Elektrodynamik die Influenz benutzt.

Bei der Gravitation kann man die Existenz der Absorption von Energie, durch Körper, welche von ihr betroffen werden, wohl kaum je zu erweisen hoffen. Doch ist der Beweis, dass keine solche Absorption bei der allgemeinen Gravitation existire, gewiss ebenso unmöglich.

Bei der Kontaktwirkung geschieht die Ausstrahlung der Energie von der Kontaktstelle aus in den zum Kontakt gebrachten festen Körpern ganz ebenso, wie von einer Wärme- oder Lichtquelle aus. Die Vorstellung einer solchen Strahlung in festen Körpern ist seit Fourier und Poisson nicht mehr ungewohnt.

Der Vorgang des Stosses zweier festen Körper zerlegt sich leicht in zwei Teile, so dass der erste Teil zu rechnen ist von der ersten Berührung bis zum Moment der grössten Annäherung, der zweite Teil von diesem Moment bis zur Trennung. Bei der Wärmestrahlung entspricht dem ersten Teil des Stosses das Heranrücken eines Körpers aus unendlicher Ferne bis an die Wärmequelle, dem zweiten Teil das Hinausrücken von der Wärmequelle weg bis in unendliche Ferne. Auf dem Wege zu und von der Wärmequelle wird der Körper, wenn er nicht absolut vollkommenes Absorptionsvermögen besitzt, sich in seiner Temperatur stets etwas von der Temperatur des Ortes unterscheiden, an welchem er sich grade befindet, und in der Wärmequelle selbst kann der Körper auch nur bei längerem Verweilen die Temperatur derselben annehmen. In gleicher Weise wird im Stosse von den aufeinander stossenden Körpern nur dann die ganze innere, d. h. in Bezug auf den Massenmittelpunkt bestimmte, kinetische Energie absorbirt, wenn dieselben im Zustande der grössten Annäherung bleiben, d. i. bei vollkommenem Mangel an Elasticität. Auf dem Wege zu und von dem Zustande der grössten Zusammen-

drückung werden aber auch die beiden auf einander stossenden Körper, wenn sie nicht vollkommen elastisch sind, in der Aufnahme und Abgabe der Energie stets etwas zurückbleiben hinter dem, was die für diesen Fall in Betracht kommende Funktion der Annäherung, die sie im fraglichen Momente haben, bestimmt. Von der innern kinetischen Energie wird nichts verzehrt im Stosse nur, wenn beide Körper vollkommen elastisch sind, wie sich Wärme-Aufnahme und -Abgabe völlig auf Hin- und Rückweg ausgleicht bei vollkommenem Absorptionsvermögen für Wärme, denn zu vollkommener Absorption gehört auch vollkommene Ausstrahlung.

Es besteht also zwischen der Absorption von kinetischer und Wärme-Energie eine vollständige Analogie, und gleiches lässt sich leicht für Licht und Elektricität darthun. Wenn man aber auf das Quantum der absorbirten Energie eingeht, so gestalten sich die Verhältnisse beim Stosse relativ äusserst einfach. Das Quantum der aus der Wärmequelle heimgebrachten Wärme ist abhängig ausser von der Substanzeigentümlichkeit noch von der Masse und Gestalt des Körpers, von der Temperatur der Wärmequelle, von der Geschwindigkeit, mit welcher Hin- und Rückweg zurückgelegt werden, und alle vier Variable sind von einander unabhängig. Anders beim Stoss. Hier hängt die Ausgiebigkeit der Energiequelle direkt zusammen sowohl mit der Masse der zusammenstossenden Körper als auch mit den Geschwindigkeiten, mit denen der Stoss im ersten wie im zweiten Teile verläuft; und zwar ergiebt sich für den Bruchteil der transformirten Energie leicht ein einfacher, experimentell bestimmbarer Wert. Bezeichne ich nämlich das Quantum der innern Energie vor und nach dem Stosse mit resp. A und B, so ist das Quantum der von beiden Körpern absorbirten Energie $= A - B$. Bezeichne ich ferner bei beiden Körpern resp. die Massen mit m_1, m_2, die Geschwindingkeiten vor dem Stosse mit v_1, v_2, die Geschwindigkeiten nach dem Stosse mit c_1, c_2, so ist:

$$A = \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (v_2 - v_1)^2; \quad B = \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (c_1 - c_2)^2;$$

denn für den Moment der grössten Zusammendrückung ergiebt sich, wenn V die Geschwindigkeit des Massenmittelpunktes bezeichnet, als Wert der kinetischen Energie:

$$\frac{1}{2}(m_1 + m_2) V^2 = \frac{1}{2}\frac{(m_1 v_1 + m_2 v_2)^2}{m_1 + m_2} = \frac{1}{2}(m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2)$$
$$- \frac{1}{2}\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}(v_2 - v_1)^2.$$

Demnach ist der Verlust an kinetischer Energie, und das ist die ganze innere kinetische Energie:

$$A = \frac{1}{2}(m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2) - \frac{1}{2}(m_1 + m_2) V^2 = \frac{1}{2}\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}(v_2 - v_1)^2.$$

Aus den Bewegungszuständen nach dem Stosse erhält man für das durch den Stoss nicht veränderte V:

$$V = \frac{m_1 c_1 + m_2 c_2}{m_1 + m_2},$$

deshalb:

$$\frac{1}{2}(m_1 + m_2) V^2 = \frac{1}{2}\frac{(m_1 c_1 + m_2 c_2)^2}{m_1 + m_2} = \frac{1}{2}(m_1 c_1^2 + m_2 c_2^2)$$
$$- \frac{1}{2}\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}(c_1 - c_2)^2.$$

Da nun B erhalten wird durch Subtraktion der Energie des Massenmittelpunktes von der Gesammtenergie nach dem Stosse $= \frac{1}{2}(m_1 c_1^2 + m_2 c_2^2)$, so ist:

$$B = \frac{1}{2}\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}(c_1 - c_2)^2.$$

Aus diesen Werten ergiebt sich aber sofort für den Bruchteil der transformirten Energie C:

$$C = \frac{A - B}{A} = 1 - \frac{(c_1 - c_2)^2}{(v_1 - v_2)^2} = 1 - e^2,$$

wenn ich mit e das Verhältnis der Geschwindigkeit bezeichne, mit welcher sich die Körper nach dem Stosse von einander trennen, zu der Geschwindigkeit, mit welcher sie sich vor dem Stosse einander näherten.

Bei dieser Ableitung ist centraler Stoss an glatten Flächen vorausgesetzt. Die Gleichung $C = 1 - e^2$ lässt sich auch leicht unabhängig von der Voraussetzung centralen Stosses in folgender Weise ableiten, wenn ich mit α_1, α_2 die *innern* Geschwindigkeiten vor, mit γ_1 und γ_2 dieselben nach dem Stosse bezeichne. Da nämlich die algebraische Bewegungssumme constant ist, so sind bei den Massen m_1 und m_2 die auf den Massenmittelpunkt bezogenen innern Bewegungsgrössen stets entgegengesetzt gleich, also:

$$m_1 \alpha_1 = + m_2 \alpha_2$$

$$m_1 \gamma_1 = + m_2 \gamma_2$$

$$m_1 (\alpha_1 - \gamma_1) = + m_2 (\alpha_2 - \gamma_2)$$

$$\frac{\alpha_1 - \gamma_1}{\alpha_1} = \frac{\alpha_2 - \gamma_2}{\alpha_2}$$

$$\frac{\gamma_1}{\alpha_1} = \frac{\gamma_2}{\alpha_2} = e;$$

m_1 hat an Energie transformirt $\frac{1}{2} m_1 (\alpha_1^2 - \gamma_1^2)$, m_2 ebenso $\frac{1}{2} m_2 (\alpha_2^2 - \gamma_2^2)$; bei beiden ist also der Bruchteil, welcher von der innern Energie transformirt wurde, gleich:

$$1 - \frac{\gamma_1^2}{\alpha_1^2} = 1 - e^2 \quad \text{und} \quad 1 - \frac{\gamma_2^2}{\alpha_1^2} = 1 - e^2.$$

Folglich ist überhaupt der Bruchteil der transformirten Energie $C = 1 - e^2$. Wenn ich nun den aufstossenden Körpern in der Stossgegend Kugelflächen anschleife, so ist leicht ersichtlich, dass während der ganzen Stosszeit die ausgestrahlte Energie zunächst auf Substanz der Kugeln trifft, da der Fokus der Energie in der beiden Kugelflächen gemeinschaftlichen Berührungsebene liegt. Im übrigen kann ich die Oberflächen der Körper eliminiren durch die Voraussetzung, dass während der kurzen Stosszeit die strahlende Energie dieselbe nirgends erreicht. Diese Voraussetzung aber scheint mir erlaubt, da es sich ja hierbei nur um die wesentlich in Form von Wärme absorbirte, nicht um die reflectirte Energie handelt, denn diese tritt nach dem Stosse wieder als innere Bewegungsgrösse hervor.

Die Energie, welche irgend eine Substanz unter dem Einfluss irgend eines Energie ausstrahlenden Punktes absorbirt, kann nun in derselben Form verharren oder auch irgend eine Transformation erleiden. So ist beim Stoss sofort anzugeben, dass ein Teil der absorbirten kinetischen Energie in Wärme, ein anderer in Schall transformirt wird, und das Verhältnis dieser beiden Teile ergiebt ohne Zweifel wieder eine für die Natur der Substanz charakteristische Konstante. Beim Blei z. B. ist nach den Versuchen von Hirn*) der in Schall transformirte Teil verschwindend gegen den in Wärme transformirten Teil. In den Versuchen von Hirn war nämlich ein 350^{kgr} schwerer Cylinder

*) Hirn, Théorie mécanique de la chaleur. Paris 1865.

von Schmiedeeisen an zwei Paar ungefähr 3^{m} langen Seilen aufgehängt. Ihm gegenüber war in ähnlicher Weise ein 941^{kgr} schwerer Sandsteinblock aufgehängt, welcher auf der dem Cylinder zugewendeten Seite mit einer eisernen Platte bekleidet war; zwischen beiden wurde ein cylindrisches 2,894^{kgr} schweres Bleistück von einer leichten Holzgabel getragen. Eine Höhlung im Bleistück diente zu Temperaturmessungen, indem sofort nach dem Stoss 18,5^{gr} Wasser von 0^{0} eingegossen wurden; und es ergab sich ein sehr nahe richtiger Wert für das mechanische Wärmeäquivalent, was unmöglich gewesen wäre, wenn sich beim Stoss auf Blei ein merklicher Teil der im Stosse vernutzten kinetischen Energie in Schallschwingungen statt in Wärme transformirte. Bei andern Metallen dürfte sich jedoch leicht eine andere Verteilung der kinetischen Energie auf Schall und Wärme ergeben, da z. B. beim Zink nur etwa der 10. Teil der kinetischen Energie in gleichem Stosse zur Transformation gelangt wie beim Blei, und beim Glase ein noch bedeutend kleinerer Bruchteil, während hinwiederum der Schall nach oberflächlicher Schätzung wohl 10mal stärker ist.

Die Stossversuche vertreten das Gebiet der Elasticität; denn in der Elasticitätslehre sucht man nach Gesetzmässigkeiten, welche die *innern* Kräfte der verschiedenen Substanzen in ihrer Wirkungsweise charakterisiren; nirgends aber zeigen sich uns die innern Kräfte in ihrer Wirkungsweise so unverhüllt, wie im Stosse fester Körper. Hier sind die Versuchsbedingungen möglichst einfach, und wir können alle Hülfsmittel der Mechanik direkt anwenden, da keinerlei in der Natur unserer Sinne begründete Störungen die rein objektive Behandlung erschweren. Viel schwieriger sind die Versuchsbedingungen auf allen andern Gebieten. Die Gase, welche aus dem von festen oder flüssigen Fixsternkernen entsendeten Lichte gewisse Wellenlängen absorbiren, fahren fort dies zu thun, anstatt mit der Zeit in einen dem ihrer Lagenbeziehung zur Lichtquelle entsprechenden Potential angemessenen Zustand zu gelangen und die Lichtwellen durchzulassen resp. ebenso viel auszusenden wie sie empfangen; und wir sind nicht im stande die Ursache hierfür oder die Form anzugeben, in welche die absorbirte Energie übergegangen ist. Bei den Versuchen im Laboratorium ist natürlich an einen Sättigungspunkt der ja immerfort wechselnden Gasbestandteile nicht zu denken.

Nicht viel anders ist es bei der Wärmestrahlung; denn ein hölzerner Ofenschirm kann verkohlen und doch noch vor der strahlenden Wärme schützen. Dies ist es ja, was zu stets neuen Konstanten führt, welche Verhältnisse der verschiedenen Formen bestimmen, in welche Energie transformirt wird. Gleichwohl ist schon vieles geschehen, was auf dem Wege zur Erforschung von Kreisprocessen der Arbeit weiter führt. Ich erwähne nur die Bestimmungen des Absorptionsvermögens für Wärme, Licht, Elektricität, — zwischen Absorptions- und Leitungsvermögen für Wärme und Elektricität scheint ein enger Zusammenhang zu bestehen, — die Bestimmungen der Dielektricitätskonstante, des Coefficienten der magnetischen Induktion, die Versuche über die photochemische Empfindlichkeit von Silbersalzen, die Berechnung der Energieteile, welche reflektirt und durchgelassen werden, wenn zwei Gasschichten durch die Schicht eines dritten getrennt sind*), und die Bestimmung der Elektricität, welche in Bergkrystallen aus den Schwingungen der strahlenden Wärme bei einer Durchstrahlung**) transformirt wird.

Die von mir in Vorhergehendem eingeführte Konstante $C = 1 - e^2$ ist vollständig bestimmt, denn sie ist gleich Null für vollkommen elastische, gleich Eins für vollkommen unelastische, also gleich einem ächten Bruch für alle wirklich existirenden Substanzen, sie ergiebt sich mit Naturnotwendigkeit aus dem obersten, allbeherrschenden Princip der Naturwissenschaften als Fixationspunkt in der Darstellung von Kreisprocessen, und ausserdem habe ich durch eine Reihe von Analogien darzuthun gesucht, dass durch C notwendig eine Substanzeigentümlichkeit präcisirt sei, weshalb C für dieselbe Substanz in demselben Zustande stets denselben Wert haben müsse. Das Experiment hat die letzte Entscheidung.

Kann sich denn aber auch die Elasticitätslehre mit der Konstanten C zu Nutz und Frommen unserer Kenntnis der physikalischen Vorgänge weiter ausbilden, oder sollte C nur als Charakteristikum für die verschiedenen Substanzen zur Eruirung der Identität oder des Unterschiedes dienen? Im Vorhergehenden ist vielleicht schon zur Genüge Antwort auf diese Frage gegeben worden; doch will ich noch mit kurzem Blicke vorwärts speciell

*) Bosanquet, Phil. Mag.

**) W. Hankel, Wied. Ann., Bd. X, Nr. 8.

Krystalle ins Auge fassen. Erfolg versprechende Arbeit zeigt sich überall in reicher Fülle. Es ist wohl kaum zu bezweifeln, dass Krystalle im allgemeinen einen verschiedenen Wert für C ergeben je nach der Richtung des Stosses zu den Axen des Krystalles; und leicht dürfte sich der Wert als Funktion der Axenlängen und Richtung zum Stosse darstellen lassen. Hat man an den Krystallen noch Leitungs- und Absorptionsvermögen für Wärme, Licht, Elektricität etc., lauter von demselben Gesichtspunkte aus erfasste Konstante bestimmt, so werden sich ohne Zweifel Beziehungen zwischen den Wirkungen von Wärme, Licht, Elektricität und mechanischer Einwirkung ergeben. Diese Wirkungen sind alle an derselben Substanz beobachtet, weshalb eventl. Beziehungen zwischen denselben zu direkten Beziehungen zwischen Wärme, Licht, Elektricität und mechanischer Einwirkung führen dürften. Weil aber mechanische Masse in diese Beziehungen mit eingeschlossen sind, so dürften sich die Hülfsmittel mehren zur Elimination der Subjectivität des Beobachters, zu objectiver Erkenntnis.

Kritik des Elasticitätsmoduls. Die Aufgaben, welche die Mathematik in der Elasticitätslehre jetzt mit Eifer behandelt, kommen alle darauf hinaus, Spannungen zu berechnen, welche irgend ein Körper in irgend einem Punkte auszuhalten hat, wenn an ihm irgend welche äussern Kräfte angreifen. Die vorzügliche Form, welche diese Untersuchungen unter den Händen bedeutender Mathematiker gewonnen haben, sichert denselben bleibenden Wert; aber in der Physik kann man die Resultate nicht viel benutzen. Sollte dies nicht mit der herrschenden Konstanten, dem Elasticitätsmodul zusammenhängen? Sehen wir also zu, wie sich die beiden Elasticitätskonstanten in Bezug auf Bestimmtheit ihrer Bedeutungen zu einander verhalten. Der Elasticitätsmodul ist der reciproke Wert derjenigen Zahl, welche angiebt, um welchen Bruchteil der ganzen Länge die Länge eines Stabes von 1□mm Querschnitt sich ändert, wenn an demselben eine Zug- oder Druckkraft von 1 Kil. wirkt. Bei der Bestimmung der Konstanten darf die s. g. Elasticitätsgrenze nicht überschritten werden, d. i. die Grenze der vollkommenen Elasticität, an welche natürlich im Ernste niemand glaubt. Darf doch ein vollkommen elastischer Körper keine innere Reibung haben, da diese eine dauernde Verlängerung bei jeder Belastung bedingt; denn nach der Definition

von O. E. Meyer (Pogg. Ann. CLI, p. 108) ist die unvollkommene Elasticität eine durch den Einfluss der innern Reibung gestörte Elasticität. Ja, durch einen vollkommen elastischen Körper müssten alle oscillatorischen und rotatorischen Bewegungen, welche wir für alle Phänomene als letztes Element deductiver Erklärung zu benutzen Grund haben, ohne jede Einbusse an Energie durchpassieren, da sonst innere Reibung vorhanden wäre. Ein solcher Körper wäre also vollkommen durchsichtig, d. h. unsichtbar, für Elektricität, Wärme etc. vollkommen permeabel, also durch diese auch nicht wahrnehmbar. Es giebt also ebenso wenig vollkommen elastische Körper wie vollkommene Leiter für Elektricität oder sonst etwas vollkommenes. Die Vollkommenheit ist exclusiv und widerstreitet dem Zusammenhange, welchem doch die Naturforschung wie einem rothen Faden durch das Gewirr der Erscheinungen nachspürt.

Wenn nun keine vollkommene Elasticität existirt, so muss es natürlich schwer sein, eine Grenze für dieselbe zu fixiren. Deshalb ist auch sowohl durch die Bestimmung, dass an einem Stabe von einem Meter Länge und 1$^{\square mm}$ Querschnitt, wenn nicht die Elasticitätsgrenze überschritten sein soll, sich keine bleibende Verlängerung von einem halben Millimeter zeigen darf, wie auch in ganz gleicher Weise durch die andere übliche Bestimmung, dass die Elasticitätsgrenze überschritten sei, sobald die Verlängerungen mit den Belastungen proportional zu sein aufhören, die Lage der Elasticitätsgrenze allein mit Rücksicht auf die Feinheit unserer Messungsmethoden und Hülfsmittel bestimmt worden. Zudem ist meines Wissens noch nur für Stahl durch die Untersuchungen von Deshayes*) nachgewiesen, dass eine messbare bleibende Verlängerung ungefähr bei denselben Belastungen eintritt, bei welchen auch die Proportionalität zwischen Belastung und Verlängerung nachweisbar nicht mehr besteht, so dass beim Stahl wenigstens die Elasticitätsgrenze als praktisch eindeutig gelten kann.

Wie verhält es sich mit der eigentlichen Begründung des Elasticitätsmoduls? Es ist unbedingt logisch am richtigsten, die vollkommene Elasticität durch die Bedingung der Proportionalität

---

*) Bull. Soc. chim. XXXI, p. 166—186 u. p. 205—227, 1879; s. Beibl. Wied. Ann. 1879, Nr. 6, p. 393.

zwischen Druck p und Deformation s zu bestimmen; denn wenn man:

$$p = as + bs^2 + cs^3 + \cdots$$

setzt, so erhält man den Fall der vollkommenen Elasticität, wenn man in der Potenzreihe gegen das erste Glied die folgenden vernachlässigt, was ja unter Umständen statthaft sein kann. Die Konstante a bestimmt sodann den Elasticitätsmodul. Diese logische Begründung für die Einführung des Elasticitätsmoduls, und eine andere ist mir unerfindlich, läuft auf eine mathematische Fiktion hinaus, welche allerdings berechtigt sein kann. Sie ist sogar, soweit man es mit Schwingungen zu thun hat, sehr nahe gelegt, denn sie führt zur einfachsten schwingenden Bewegung, der s. g. harmonischen, da jedes Molekül nach einem bestimmten Orte stets mit einer dem Abstande von diesem Orte proportionalen Kraft hingetrieben wird. Die Schwingungsdauer T und die Fortpflanzungsgeschwindigkeit Γ sind bestimmt durch:

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\varkappa}}, \quad \Gamma = \sqrt{\frac{E}{d}},$$

wenn E den Elasticitätsmodul und d die Dichtigkeit bezeichnet.

Laplace hat auf Grund dieser Formeln für die Fortpflanzung des Schalles in der Luft bei Berücksichtigung der Erwärmung und Abkühlung der Luft in den Schallwellen einen sehr nahe richtigen Wert berechnet. Für diesen Fall hat sich also die Einführung der vollkommenen Elasticität praktisch bewährt. Man darf jedoch nicht folgern, dass man deshalb die Luft stets mit genügender Approximation als vollkommen elastisch behandeln dürfe. Dies ist nicht einmal in der Akustik überall gestattet, wie die Betrachtung der Superposition der Bewegungen in den Combinationstönen beweist.*) Für feste Körper erweist sich aber die Annahme vollkommener Elasticität als erste Approximation bereits bei der Berechnung der Schallgeschwindigkeit als unzulässig; denn Biot beobachtete im Eisen eine Schallgeschwindigkeit gleich 3500^{m}, während die Rechnung 5020^{m} ergiebt.

Helmholtz berücksichtigt deshalb l. c. ein weiteres Glied der Potenzreihe, indem er ausgeht von der Differentialgleichung:

$$\frac{d^2s}{dt^2} = -\mu s - bs^2,$$

*) S. Helmholtz, über Combinationstöne. Pogg. Ann. 99.

welche mit Hülfe der unendlichen Reihe:

$$s = \varepsilon s_1 + \varepsilon^2 s_2 + \varepsilon^3 s_3 + \cdots$$

integrirt wird. Die Hinzunahme des einen Gliedes der Reihe erschwert jedoch die Rechnung ausserordentlich.

Die Rechnung macht sich einfacher, wenn man, anstatt konsequent an der Potenzreihe festzuhalten, der vollkommenen Elasticität Selbstberechtigung zuerkennt und eine Korrektur anbringt durch Einführung einer Verzögerung, welche man der Geschwindigkeit v proportional setzt. Es ergiebt sich alsdann die Differentialgleichung:

$$\frac{d^2 s}{d t^2} = -\varkappa s - 2\lambda v,$$

welche sich mit Hülfe des partikulären Integrals $s = e^{\alpha t}$ leicht vollständig integriren lässt; und es eröffnet sich noch die Aussicht, λ durch eine experimentell bestimmbare Konstante ersetzt zu erhalten. Es ist nämlich nach Gauss (Resultate aus den Beobachtungen des magnetischen Vereins, 1837, p. 751) das logarithmische Decrement $= \lambda \frac{T}{2} \log e$. Aber das log. Decr. lässt sich nur durch Torsionsschwingungen mit einiger Sicherheit bestimmen, und die Reduktion desselben auf Longitudinalschwingungen macht wieder einige Voraussetzungen nötig, welche die Wirklichkeit nur mit grober Approximation erfüllt. Deshalb darf ich wohl behaupten, dass man bis jetzt trotz aller Schärfe und Eleganz der Rechnung keinen praktisch brauchbaren Übergang von der vollkommenen Elasticität zur Wirklichkeit zu finden vermocht hat.*)

*) Hierzu stimmt wunderbar die Bemerkung von Cellérier (Arch. de Genève, T. IV, 1880, p. 37), „dass die innern Druckkräfte dem hydrostatischen Gesetze folgen mit einer Genauigkeit, welche ohne Grenzen zunimmt mit den Dimensionen des Körpers". Bedenkt man nämlich, dass höhere als die erste Potenz der Verschiebungen bei der Aufstellung der Gleichungen des elastischen Gleichgewichts vernachlässigt werden, weshalb die Dimensionen des Körpers im Vergleich zu den vorkommenden Verschiebungen unendlich gross sein müssen, und bedenkt man ferner, dass ich für das hydrostatische Gesetz ohne weiteres das aerostatische Gesetz sagen kann, da es sich nur um unendlich leichte Verschiebbarkeit der Teilchen gegen einander handelt, so erkennt man leicht, dass man strenge genommen von der Voraussetzung vollkommener Elasticität nicht loskommt, so lange man Gleichgewichtsbedingungen durch die Verschiebungen ausdrückt, also Elasticitätsstatik treibt anstatt Dynamik.

Aus der Gleichung: $p = as + bs^2 + cs^3 + \cdots$ folgt:

$$\left(\frac{p}{s}\right)_{\lim s=0} = a.$$

Lim $s = 0$ ist der mathematische Ausdruck für die Ansicht, dass es keine vollkommene Elasticität giebt. Die Potenzreihe aber ist ein beliebtes Instrument zur mathematischen Darstellung irgend welcher physikalischen Abhängigkeit, für welche eine deductive Erklärung noch unmöglich ist, z. B. der Abhängigkeit des log. Decr. von der Schwingungsweite, weil sich stets schon mit wenigen Gliedern die Konstanten a, b, c so bestimmen lassen, dass genügende Übereinstimmung zwischen Rechnung und Beobachtung erzielt wird. Aus dieser Anwendung der Potenzreihe geht zur Evidenz hervor, dass an eine physikalische Bedeutung ihrer Konstanten im allgemeinen nicht zu denken ist. Dagegen ist die von mir vorgeschlagene Konstante C direkt aus dem Princip von der Erhaltung der Energie hergeleitet; sie ist zunächst rein physikalisch definirt.

Bei der Bestimmung der Konstanten nehmen die experimentellen Schwierigkeiten ausserordentlich zu durch den Einfluss des Zustandswechsels der Substanzen durch Wärme, Elektricität etc.*) Eine solche Abhängigkeit der Konstanten ist kein Nachteil, wie bereits erörtert; es liegt aber ein Unterschied zwischen der von mir vorgeschlagenen Konstanten C und dem Elasticitätsmodul darin, dass C bei ideellen experimentellen Hülfsmitteln eine bestimmte Substanzeigentümlichkeit mit voller Bestimmtheit angiebt, während der Elasticitätsmodul wegen der mit ihm unlöslich verstrickten Bedingung lim $s = 0$ keine ideellen experimentellen Hülfsmittel verträgt. Deshalb ist der Elasticitätsmodul nicht wie die von mir vorgeschlagene Konstante C direkt zur physikalischen Deduction zu gebrauchen, sondern nur für eine approximative mathematische Formulirung physikalischer Gesetzmässigkeiten. Ich glaube deshalb, dass die in obigem möglichst umfassend begründete Konstante C Concurrenz mit dem Elasticitätsmodul nicht zu fürchten hat, wenngleich ich ihr keine grade die unterschei-

*) Über den Einfluss der Temperatur s. Kupffer, 1856, genauer Kohlrausch und Loomis, 1870, und andere. Über den Einfluss der Elektricität s. Hoffmann, Osterprogramm 1880 des Gymnasiums zu Dresden-Neustadt.

denden Merkmale passend und kurz bezeichnende Benennung mit auf den Weg zu geben weiss.*)

Korrektur des Elasticitätsmoduls. Trotz der von mir gegen den Elasticitätsmodul geübten Kritik möchte doch leicht jemand auf den Gedanken kommen, einen Zusammenhang zwischen der von mir vorgeschlagenen Konstanten C und dem Elasticitätsmodul ausfindig machen zu wollen; ist es mir selbst doch nicht anders gegangen. Bei der Herleitung der mathematischen Definition von C aus der physikalischen will ich deshalb jetzt den Elasticitätsmodul einführen. Zwei Stäbe a und b, aus derselben Substanz gearbeitet, mögen mit kongruenten Querschnitten so auf einander stossen, dass dieselben sich im Stosse genau decken, wenn der Stoss in der Richtung der Axen beider Stäbe erfolgt. Bezeichne ich nun mit φ den Querschnitt, mit resp. l_a, l_b die Längen, mit resp. s_a, s_b die Deformationen und mit E den Elasticitätsmodul, so giebt die Elasticitätstheorie bei der Compression sowohl als bei der Dilatation für den Druck p und die Deformation s die Beziehung resp.

$$\frac{p}{s_a} = \frac{\varphi E}{l_a}; \quad \frac{p}{s_b} = \frac{\varphi E}{l_b}.$$

p ist eine lineare Funktion von s, wenn ich mich innerhalb der s. g. Elasticitätsgrenze halte. Den Vorgang des Stosses teile ich in die beiden Teile vor und nach dem Zustande der grössten Zusammendrückung. Trage ich nun die Deformationen s als Abscissen und normal dazu die zugehörigen Drucke p als Ordinaten auf, so werden die Druckordinaten p für den ersten Teil des Stossvorganges bei beiden Stäben a und b zwei rechtwinklige Dreiecke überdecken, welche die letzte Druckordinate P für den

*) W. Wundt sagt in einer Abhandlung über das kosmologische Problem in der Zeitschrift von Avenarius, Heft I, Jahrgang 1, p. 120, über die Arbeiten, welche sich mit dem transcendentalen Raumbegriff befassen: „Wenn jene Arbeiten nur das *eine* Verdienst hätten, dass sie furchtlos und unbeirrt von herrschenden Anschauungen die Prüfung der allgemeinen Voraussetzungen der Naturwissenschaften unternehmen, so wäre dieses Verdienst schon gross. Sie arbeiten damit den gefährlichsten Feinden des wissenschaftlichen Fortschrittes entgegen, die in den exakten Wissenschaften so mächtig sind wie irgend sonst, dem blinden Autoritätsglauben und dem Vorurteil, eine allgemein verbreitete und eingewurzelte Anschauung müsse deshalb auch wahr sein". S. hierüber auch Th. Buckle, History of civilization in England, Vol. V, p. 243. Ausgabe von Brockhaus 1865.

Zustand der grössten Zusammendrückung als gemeinschaftliche Kathete haben. Die spitzen Winkel an der Abscissenlinie resp. α und β sind bestimmt durch:

$$1)\quad \begin{cases} \operatorname{tg} \alpha = \frac{p}{s_a} = \frac{\varphi E}{l_a} \\ \operatorname{tg} \beta = \frac{p}{s_b} = \frac{\varphi E}{l_b} \end{cases}$$

Die rechtwinkligen Dreiecke ABD und BCD geben durch ihre Flächen die bis zum Moment der grössten Zusammendrückung von resp. a und b aufgenommene innere kinetische Energie, das Dreieck ACD demnach die gesammte vor dem Stosse vorhandene innere kinetische Energie A an, für welche sich deshalb sofort ergiebt, wenn ich mit resp. S_a und S_b die Deformationen von a und b im Moment der grössten Zusammendrückung bezeichne:

$$A = \frac{P}{2} (S_a + S_b)$$

oder mit Rücksicht auf 1):

$$A = \frac{P^2}{2} \left(\frac{l_a}{\varphi E} + \frac{l_b}{\varphi E} \right).$$

In ganz gleicher Weise berechnet sich die kinetische Energie, welche im zweiten Teile des Stossvorganges wieder hervortritt. Wollte ich mich jedoch an die wahre Elasticitätsgrenze fesseln, so müsste die ganze innere kinetische Energie nach dem Stosse wieder zum Vorschein kommen; ich erhielte dieselben Dreiecke im zweiten Teile des Stosses wieder, welche ich im ersten hatte. In Wahrheit findet jedoch auch bei den schwächsten Stössen ein geringer Energieverbrauch statt; aber ich kann doch wie üblich

annehmen, dass die s. g. Elasticitätsgrenze noch nicht überschritten sei. Die Dreiecke für die im zweiten Teile des Stosses wieder hervortretende Energie müssen deshalb den Dreiecken für den ersten Teil ähnlich sein, da die Gleichungen 1) unverändert gelten. Folglich muss die Druckordinate $\mathfrak{P}$ zu Beginn des zweiten Teiles des Stosses etwas kleiner genommen werden als diejenige P am Schlusse des ersten Teiles des Stossvorganges. Wenn ich nun noch die Stücke, welche auf den Abscissenkatheten bei den kleineren Dreiecken übrig geblieben sind, mit resp. σ_a und σ_b bezeichne, so erhalte ich für die nach dem Stosse wieder hervortretende kinetische Energie B ganz wie vorhin:

$$B = \frac{\mathfrak{P}}{2}(S_a - \sigma_a + S_b - \sigma_b)$$

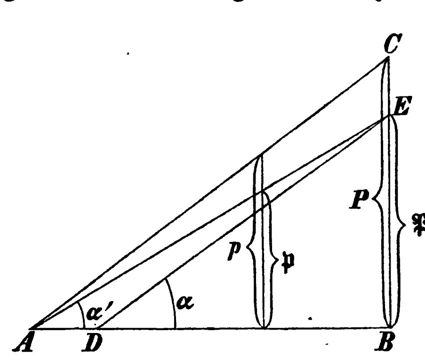
und mit Rücksicht auf 1):

$$B = \frac{\mathfrak{P}^2}{2}\left(\frac{l_a}{\varphi E} + \frac{l_b}{\varphi E}\right).$$

Für das Verhältnis C der im Stosse transformirten zu der vor dem Stosse vorhandenen innern kinetischen Energie ergiebt sich hieraus:

$$C = \frac{A - B}{A} = 1 - \frac{\mathfrak{P}^2}{P^2}.$$

Bei der weitern Interpretation des Verhältnisses $\mathfrak{P} : P$ will ich nur noch den Stab a ins Auge fassen, da a und b sich völlig gleich verhalten. Zu der bis dahin benutzten Voraussetzung der linearen Beziehung zwischen Druck und Deformation trotz des Energieverbrauchs im Stosse der nicht streng vollkommen elastisch gedachten Stäbe füge ich aber jetzt noch die Voraussetzung, dass sich die in den beiden Hälften des Stossvorganges transformirten Energiemengen verhalten wie die Wegstrecken, auf welchen in denselben Druck und Gegendruck haben zurückgedrängt werden müssen, wie $S_a : S_a - \sigma_a$, oder was auf dasselbe hinauskommt, wie $P : \mathfrak{P}$. Unter dieser Voraussetzung stellt in der nebenstehenden Figur für den Stab a und die erste Hälfte des



Stossvorganges vor: das Dreieck ABC die empfangene, ACE die transformirte, ABE die für die Verwendung in der zweiten Hälfte des Stossvorganges aufgespeicherte Energiemenge; denn AE teilt das Viereck $ACED$, welches die im ganzen Stossvorgange in a transformirte Energiemenge darstellt, in zwei Dreiecke, die sich wie P zu $\mathfrak{P}$ verhalten. Bezeichne ich nun noch mit p und $\mathfrak{p}$ Drucke für ein beliebiges Zeitelement der ersten Hälfte des Stossvorganges, so ist aus der Figur direkt zu entnehmen:

$$p : \mathfrak{p} = \operatorname{tg} \alpha : \operatorname{tg} \alpha',$$

d. h. der Druck p, welchen der Stab a im betrachteten Zeitmoment erfährt, oder die in dem betreffenden Zeitelement dt aufgenommene Bewegungsgrösse pdt verhält sich zu derjenigen $\mathfrak{p}dt$, welche für die Verausgabung in der zweiten Hälfte des Stossvorganges aufgespeichert wird, wie $\operatorname{tg} \alpha : \operatorname{tg} \alpha'$.

Will ich dieselbe Betrachtung auf die zweite Hälfte des Stossvorganges ausdehnen, so brauche ich nur zu bedenken, dass in den beiden Energiedreiecken ABE und DBE die Katheten für Druck und Deformation mit einander vertauscht werden dürfen, da die Energie durch die Dreiecks*fläche* dargestellt wird, dass ich also auch die Deformationen s auf BE und die zugehörigen Drucke normal zu BE aufgetragen vorstellen darf, um für beide Energiedreiecke $\int p \cdot ds$ gleiche Wege s und damit in $\int pvdt$ gleiche Grenzen zu erhalten. Wenn ich nun für diese Energiesummen mit $\mathfrak{p}$ und π entsprechende Drucke bezeichne, so ergiebt sich sofort:

$$\mathfrak{p} : \pi = \operatorname{tg} \alpha : \operatorname{tg} \alpha',$$

also auch im zweiten Teil des Stossvorganges verhält sich in einem beliebigen Zeitelement und deshalb auch während der ganzen Dauer die aufgenommene Bewegungsgrösse $\mathfrak{p}dt$ zu der wieder zur Verausgabung gelangenden πdt wie $\operatorname{tg} \alpha : \operatorname{tg} \alpha'$; $\operatorname{tg} \alpha : \operatorname{tg} \alpha'$ giebt für den ganzen Verlauf des Stosses das Verhältnis an, nach welchem die ausgetauschte Bewegungsgrösse vermindert wird.

Wegen des experimentell mit genügender Sicherheit erwiesenen vollkommenen Austausches der Bewegungszustände gleicher vollkommen elastischer Kugeln darf ich wohl annehmen, dass die im Stosse auch nicht vollkommen elastischer Körper beim Austausch beteiligte Bewegungsgrösse, die s. g. innere Bewegungs-

grösse von resp. a und b vollkommen ausgetauscht wird, nur dass bei diesem Austausch eine gewisse Absorption stattfindet, welche nach obiger Überlegung eine Verminderung nach dem Verhältnisse $\operatorname{tg}\alpha : \operatorname{tg}\alpha'$ bedingt. Der Austausch der innern Bewegungsgrössen zwischen a und b hat sich noch nicht ganz in dem ersten Teil des Stossvorganges vollzogen, sondern er vollzieht sich erst im ganzen Verlauf des Stosses; dies entspricht den Beobachtungen an nahe vollkommen elastischen Körpern.

Ich erhalte also die Gleichung:

$$2)\quad m_a(v_a - V) + m_b(V - v_b) = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\alpha'}\left\{m_a(V - c_a) + m_b(c_b - V)\right\},$$

wenn ich die Geschwindigkeiten der beiden Stäbe mit den Massen m_a, m_b vor dem Stosse mit v_a, v_b, nach dem Stosse mit c_a, c_b bezeichne. Vor dem Stosse ist $V = \frac{m_a v_a + m_b v_b}{m_a + m_b}$, nach dem Stosse $V = \frac{m_a c_a + m_b c_b}{m_a + m_b}$. Wenn ich mit Hülfe dieser beiden natürlich gleichen Werte V aus 2) eliminire, so ergiebt eine leichte Vereinfachung:

$$v_a - v_b = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\alpha'}(c_b - c_a).$$

Demnach erhalte ich:

$$C = 1 - \frac{\mathfrak{P}^2}{P^2} = 1 - \left(\frac{\operatorname{tg}\alpha'}{\operatorname{tg}\alpha}\right)^2 = 1 - \left(\frac{c_b - c_a}{v_a - v_b}\right)^2 = 1 - e^2;$$

denn auf p. 17 habe ich bereits, wie eine andere Betrachtung zu demselben Ausdruck für C führte, für das Verhältnis der Geschwindigkeit, mit welcher sich die beiden Körper nach dem Stosse von einander trennen, zu der Geschwindigkeit, mit welcher sie sich vor dem Stosse einander näherten, die Bezeichnung e eingeführt.

Die zuletzt eingeführte Voraussetzung, dass im Stoss die innere Bewegungsgrösse einfach aber vollständig zum Austausch komme, duldet keine Approximation*); ich muss sie als streng erfüllt ansehen. Mögen nun die beiden andern Voraussetzungen:

*) An nahe vollkommen elastischen Körpern lässt sich der Austausch beobachten, und an nicht vollkommen elastischen Massen sind nicht nur stets die innern Bewegungsgrössen soweit sie sichtbar, sondern auch soweit sie in zwei aufeinanderstossenden Massen latent sind, einander gleich, so dass die Vorstellung eines Austausches der innern Bewegungsgrössen streng zu fassen ist, wenn man dieselbe überhaupt einführen will.

1) die lineare Beziehung zwischen Druck und Deformation besteht noch nach Aufgabe des ideellen Zustandes vollkommener Elasticität,
2) die Energiequanta, welche resp. in der ersten und zweiten Hälfte des Stossvorganges transformirt werden, verhalten sich wie $P : \mathfrak{P}$,

nur approximativ richtig sein; das aus ihnen abgeleitete Resultat ist vollkommen genau; denn ich erhielt dasselbe ohne diese Voraussetzungen p. 33 auf zweierlei Weise, und eine vierte Ableitung findet sich in der theoretischen Physik von Thomson und Tait, autorisirte deutsche Uebersetzung, T. I, 1, p. 235. In beiden Voraussetzungen muss also eine gewisse Fehlercompensation liegen. Die Anwendung, welche in obigem von der Voraussetzung 2) gemacht ist, bietet also die Mittel zur Korrektur des Elasticitätsmoduls, was mir ausserordentlich wichtig zu sein scheint, da der korrigirte Elasticitätsmodul wirklich brauchbar wird zur Berechnung der Oscillationen in festen Körpern.

Voraussetzung 1) über den Elasticitätsmodul E ist enthalten in:

$$E = \frac{l_a}{\varphi} \cdot \frac{p}{s} = \frac{l_a}{\varphi} \cdot \operatorname{tg} \alpha,$$

während nach Hinzunahme der Voraussetzung 2) für den der Wirklichkeit angepassten Elasticitätsmodul $\mathfrak{E}$ zu setzen ist:

$$\mathfrak{E} = \frac{l_a}{\varphi} \cdot \operatorname{tg} \alpha'.$$

Demnach ist:

$$\mathfrak{E} = E \frac{\operatorname{tg} \alpha'}{\operatorname{tg} \alpha} = Ee.$$

Eine Probe auf diese Korrektur bietet sich in den Versuchen von Biot zur Bestimmung der Schallgeschwindigkeit in eisernen Röhrenleitungen. Diese ergaben eine Schallgeschwindigkeit gleich etwa 3500^{m}. Für Eisen hat e ungefähr den Wert $^5/_9$. Der Elasticitätsmodul E für Eisen ist nach Decharme 18343 000 000, nach Wertheim 18547 000 000 oder 19410 000 000, und die Masse eines Kubikmeters Eisen ist 7800 : 9,808 = 795. Demnach ergiebt sich für die Schallgeschwindigkeit:

$$M_e = \sqrt{\frac{5 \cdot 18547\,000\,000}{9 \cdot 795}} = 3600^{\mathrm{m}}.$$

Mit dieser Übereinstimmung glaube ich zufrieden sein zu können,

wenn ich bedenke, dass ohne meine Korrektur die Rechnung für die Schallgeschwindigkeit in Eisen 4830^{m} ergiebt. Man pflegt den geringen Wert, welchen Biot für die Schallgeschwindigkeit fand, dadurch zu erklären, dass die Röhrenleitung nicht aus einem Gusse war; aber Wertheim und Breguet fanden an eisernen Telegraphenleitungen dieselbe Schallgeschwindigkeit, welche Biot beobachtet hatte. Nach direkter Methode wurde ausserdem nur noch die Schallgeschwindigkeit im Wasser bestimmt, und zwar fanden Colladon und Sturm 1817 im Genfer See für dieselbe den Wert 1435^{m}. Dieselbe Zahl giebt sehr nahe auch die Rechnung auf Grund des durch Kompressionsversuche bestimmten Elasticitätsmoduls.*) Beim Wasser bedarf also der Elasticitätsmodul keiner Korrektur; oder e ist $= 1$. Die experimentelle Bestimmung von e für Wasser erscheint freilich fast unmöglich; doch lässt sich nach den Bemerkungen p. 24 wohl $e = 1$ erwarten.**)

Nun sind aber nach indirekter Methode für die Schallgeschwindigkeit wesentlich andere Werte gefunden worden. Für Eisen fand Wertheim 5017^{m} und Chladni gar 5548^{m} statt 3500^{m}; für Wasser fand Wertheim 1173^{m} statt 1435^{m} nach direkter Methode. Für Wasser sucht Wertheim diesen Unterschied aufzuheben durch Hinzufügung des Faktors $\sqrt{\frac{3}{2}} = 1,2247$, welche er auf Versuche über Querdilatationen gelegentlich der Längenkontraktionen basirt. Helmholtz stimmte jedoch dieser Erklärung für den verzögernden Einfluss der Stabform nicht zu, weil eine fest umschlossene flüssige Säule unmöglich Querdilatationen ausführen könne, und machte auf den Einfluss der Röhrenwand aufmerksam, welchen darauf 1874 Kundt experimentell unbestreitbar nachwies.

Ich weise zunächst darauf hin, dass bei der indirekten Methode zur Bestimmung der Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalles der stabförmige Körper nicht den Schall fortleitet sondern erzeugt, dass man es nicht mit fortschreitenden sondern mit stehenden Wellen zu thun hat, und gelange durch Be-

*) S. De Luca, Beibl. 1879, Nr. 3, p. 153: $v = 1437^{m}$.

**) Beachtenswert erscheint mir, was Lambert sagt in einer kleinen Schrift über d'Arcys Versuche, p. 47: eine weiche Kugel komme den Gesetzen des Stosses elastischer Körper um so näher, je grösser ihre Geschwindigkeit sei, da bei weichen Körpern die kleinsten Teile hart und ohne Zweifel elastisch seien.

rücksichtigung dieses Umstandes zur Umkehrung der Argumentation Wertheims, zu der Folgerung nämlich, dass in den stabförmigen, fest eingeschlossenen Flüssigkeiten die Schallgeschwindigkeit gehemmt wird, eben weil die Wandung Querdilatationen verhindert, während in stabförmigen festen Körpern, welchen die umgebende Luft Querdilatationen gestattet, eben wegen des freieren Spiels der Elasticitätskräfte eine grössere Schallgeschwindigkeit beobachtet wird als durch direkte Versuche. So ist wenigstens die Korrektur der entgegengesetzt gerichteten Abweichungen bei festen und flüssigen stabförmigen Körpern eine einheitliche.

Stellt man sich nämlich vor, wie von einer Schallquelle aus in einer unendlich ausgedehnten Flüssigkeit eine Verdichtung fortschreitet, so ergiebt sich freilich für die ins Auge gefasste Kugelschale ringsum dieselbe Verdichtung, was jede Querdilatation verhindert; da es sich aber um eine fortschreitende Welle handelt, so ist zu bedenken, dass wegen der unendlich leichten Verschiebbarkeit der Wassermoleküle an einander bereits bei der entstehenden Verdichtung ungehindert einige Moleküle nach vorwärts ausscheiden und in den folgenden Kugelschalen Verdichtung vorbereiten können, was bei den stehenden Wellen der tönenden fest eingeschlossenen Wassersäule unmöglich ist. In der tönenden Flüssigkeit werden statt dessen durch den Einfluss der mehr oder weniger elastischen Wandung Bewegungen hervorgerufen, welche den Verlauf der den Ton erzeugenden Welle nur stören. Das entgegengesetzte Verhalten zeigen feste Körper. Stelle ich mir nämlich in einer unendlich ausgedehnten Eisenmasse von einer Schallquelle aus eine Verdichtung fortschreitend vor, so habe ich wieder auf der ins Auge gefassten Kugelschale ringsum dieselbe Verdichtung, wodurch jede Querdilatation ausgeschlossen ist. Es können aber wegen übergrosser Kohäsion in festen Körpern nicht wie in Flüssigkeiten schon während der entstehenden Verdichtung Teilchen nach vorwärts ausscheiden, die fortschreitende Verdichtung vorbereitend. Giebt dagegen der Eisenstab seinen Grundton, so kann er Querdilatationen ausführen, so weit dies nur die eigene Kohäsion gestattet, und durch die regelmässige Wiederkehr werden diese sowie auch die Longitudinalschwingungen selbst wahrscheinlich wesentlich erleichtert. Während die Wassersäule als Tonquelle von allen Seiten gehemmt war gegen das den Schall bei beliebiger Ausdehnung forttragende

Wasser, ist der eiserne Stab als Tonquelle relativ frei für das Spiel der Elasticitätskräfte. Dadurch erklärt es sich wohl, dass die indirekte Methode für Flüssigkeiten zu kleine, für feste Körper zu grosse Werte ergiebt, vorausgesetzt, dass die nach direkter Methode erhaltenen Werte für die Schallgeschwindigkeit als die richtigen anzusehen sind.

Aus den übergrossen Werten der Schallgeschwindigkeit in festen Körpern berechnen sich auch übergrosse Werte für die Elasticitätsmoduln fester Körper. Die direkten experimentellen Bestimmungen ergeben gleichfalls zu grosse Elasticitätsmoduln, weshalb ich die Korrektur durch den Faktor e einführte. Also beide Methoden ergeben zu grosse Elasticitätsmoduln, weshalb aus der befriedigenden Übereinstimmung der nach beiden Methoden erhaltenen Werte nicht auf die Richtigkeit dieser geschlossen werden kann. Für Eisen stimmte der Wert meines Korrektionsfaktors e recht gut; doch halte ich eine weitere Bestätigung durch das Experiment nicht nur für erwünscht, sondern auch für notwendig. Wegen der an Siemens'schen Maschinen vielfach benötigten starken Kupferdrähte dürfte leicht jemand im Stande sein die Schallgeschwindigkeit in Kupfer nach direkter Methode zu bestimmen, für welche meine Rechnung, da $e = 0{,}6837$, $E = 11833\,000\,000$, $s = 8{,}788$ genommen werden kann, 3015^{m} ergiebt, während nach indirekter Methode 3652^{m} bis 3984^{m} gefunden wird.

Besprechung der direkt in Frage kommenden Litteratur. In den modernen Lehrbüchern der Elasticitätstheorie wird der Stoss fester Körper mit solcher Konsequenz vernachlässigt, dass ich nur in dem Handbuch der theoretischen Physik von Thomson und Tait, Übersetzung von Helmholtz und Wertheim, eine auf Newton zurückweisende Notiz gefunden habe, welche ich für meine Arbeit nutzen kann. L. c. p. 235, T. I, 1 heisst es nämlich: „Unter der Voraussetzung, dass der Stoss nicht so heftig ist, um einen merklichen bleibenden Eindruck in einem der beiden Körper zu hinterlassen, fand Newton, dass die relative Geschwindigkeit, mit der sich die Körper nach dem Stosse trennen, zur relativen Geschwindigkeit, mit der sie sich vorher einander näherten, in einem für die nämlichen beiden Körper konstanten Verhältnisse steht. Dies Verhältnis ist immer kleiner als Eins, nähert sich aber der Einheit immer mehr, je härter

die Körper sind. Für Kugeln von zusammengepresster Welle erhielt Newton für dasselbe den Wert 5 : 9, für eiserne Kugeln ungefähr denselben Wert, für gläserne 15 : 16. Die Ergebnisse neuerer experimentellen Untersuchungen über denselben Gegenstand, die wir später beschreiben werden, haben Newtons Gesetz bestätigt. Wir wollen jenes Verhältnis den *Restitutionscoefficienten* nennen". Die angegebene Veröffentlichung der neueren Versuche ist ohne Zweifel von Thomson und Tait im zweiten Bande des citirten Handbuches wahrscheinlich in dem vielfach ersehnten Kapitel über die Eigenschaften der Materie beabsichtigt; doch scheint es nicht, als ob dieser zweite Band je erscheinen soll. Ich habe mir nun viele Mühe gegeben, der neueren experimentellen Untersuchungen, welche die Versuche Newtons bestätigen sollen, habhaft zu werden, doch ohne Erfolg. Die Versuche Newtons sind zu wenig zuverlässig, als dass ich mir eigene recht langwierige Versuche hätte ersparen können, obgleich die von mir befürwortete Konstante C sich aus dem Restitutionscoefficienten e berechnet nach $C = 1 - e^2$. Ganz erfolglos sind ferner meine Bemühungen gewesen, die Lehrbücher der neuesten Zeit in meine Hände zu bekommen, von denen Thomson und Tait berichten, dass in ihnen der Newton'sche Restitutionscoefficient als Elasticitätscoefficient angesprochen werde, „was offenbar ein Missgriff sei, der zwar durch Newtons Worte veranlasst sein könne, aber sich mit den von Newton angegebenen Thatsachen nicht vertrage und zudem mit der neuern Ausdrucksweise und Kenntnis in Betreff der Elasticität im schroffsten Widerspruch stehe". Nach obiger Bemerkung ist es mir aber wieder unerfindlich, welche von den von Newton angegebenen Thatsachen sich damit nicht vertragen soll, dass man den Restitutionscoefficienten als Elasticitätscoefficienten auffasst, was doch wohl Newton beabsichtigte. Denn Newton sagt p. 21 seiner Principien: „Primum demittendo Pendula et mensurando reflectionem inveni *quantitatem vis Elasticae;* deinde per hanc vim determinavi reflectiones in aliis casibus concursuum et respondebant Experimenta". Die Beziehungen zwischen dem Restitutionscoefficienten und dem Elasticitätscoefficienten habe ich wohl schon zur Genüge erörtert.

In Kapitel 302 gehen Thomson und Tait, nachdem sie bemerkt, dass man unpassend den Teil des Verlustes an Energie im Stosse die Wirkung der unvollkommenen Elasticität nennt,

welchen Tadel ich nicht fasse, da doch bei vollkommener Elasticität keine Energie verloren geht, zu dem Versuche über, die Konstanz des Restitutionscoefficienten für dieselbe Substanz natürlich innerhalb der Elasticitätsgrenze und ohne Angabe, wo dieselbe bei der zusammengedrehten Wolle, mit welcher Newton experimentirte, etwa liegen dürfte, weiter herzuleiten wie folgt: „Später, in dem Kapitel über die Eigenschaften der Materie, wird es sich als Resultat experimenteller Forschung ergeben, dass in festen elastischen Körpern, welche wie Metalle, Glas u. s. w. nur geringe Formänderungen ohne bleibende Änderungen ertragen, die Elasticitätskräfte innerhalb der Grenzen der Elasticität bis zu einem grossen Grade der Genauigkeit einfach den Deformationen proportional sind. Wenn also zwei solche Körper manchmal mit grösserer und manchmal mit geringerer wechselseitiger Geschwindigkeit zusammenstossen, während alle übrigen Umstände unverändert gelassen sind, so werden die Geschwindigkeiten aller materiellen Punkte jedes Körpers zu entsprechenden Zeiten der Stösse immer in demselben Verhältnis stehen. Folglich steht die Geschwindigkeit, mit der sich die Trägheitsmittelpunkte nach dem Stosse trennen, zu der Geschwindigkeit, mit der sie sich vorher einander näherten, in einem konstanten Verhältnis, was mit Newtons Gesetz übereinstimmt. Es ist daher wahrscheinlich, dass, wenn nicht die ganze, so doch ein beträchtlicher Teil der von Newton experimentell bestimmten Energie(?), welche in den sichtbaren Bewegungen zweier elastischen Körper nach dem Stosse verloren ist, den Vibrationen zugeschrieben werden muss. Aber wenn nicht noch eine andere Ursache in hohem Grade thätig war, so ist es schwer einzusehen, warum der Verlust bei eisernen Kugeln so bedeutend grösser als bei gläsernen ist“. In dieser Weise geht die Argumentation noch durch die nächsten Kapitel fort.

So bin ich also in der unangenehmen Lage, von alledem, was direkt auf das Ziel meiner Untersuchungen Bezug hat, nur die kleine Notiz von Newton zu verstehen. Ich stimme gern mit Thomson in das Verwundern ein darüber, dass der Verlust bei eisernen Kugeln so bedeutend grösser als bei gläsernen ist, verwundere mich aber noch vielmehr darüber, dass Thomson nicht von der Ansicht loskommt, es habe sich Newton bei seinen Versuchen innerhalb der Elasticitätsgrenze gehalten; denn

innerhalb der Elasticitätsgrenze sollen doch alle Körper wenigstens sehr angenähert vollkommen elastisch sein, und vollkommen elastische Körper sollen im Stoss keinen Energieverlust erleiden. Thomson kennt doch bereits die Formel, nach welcher sich der Bruchteil der im Stosse transformirten Energie C berechnet nach $C = 1 - e^2$, also für Eisen $C = 1 - (\frac{5}{9})^2 = \frac{56}{81} > \frac{2}{3}$. Eisen ist also nach den Newton'schen Versuchen dem vollkommenen Mangel an Elasticität doppelt so nahe als der vollkommenen Elasticität. Innerhalb der Elasticitätsgrenze kann sich natürlich keine Erklärung physikalischer Vorgänge bewegen; Klarheit in der Deduction scheint mir aber nur bei vollkommen bewusstem Überschreiten dieser Grenze möglich etwa in der Weise, wie dies von mir bei der Korrektur des Elasticitätsmoduls geschehen ist.

Die Konstanz von C gilt nach meiner Ansicht keineswegs für beliebig starke Stösse; denn wenn z. B. zwei Eiskugeln am Stosspunkte schmelzen, so wird doch wohl das in andern Aggregatzustand übergeführte H_2O sich im Stosse etwas anders verhalten. Ich halte C nur für konstant, so lange der Zustand der untersuchten Substanz als derselbe zu betrachten ist, sonst könnte ja C diesen Zustand auch nicht charakterisiren.

Ableitung der zur Bestimmung von C benutzten Formel. Der Bruchteil C der innern kinetischen Energie, welcher im Stosse absorbirt wird, hängt von dem Restitutionscoefficienten e ab nach der Gleichung:

$$C = 1 - e^2.$$

Die Pendel, durch deren Stoss Newton e bestimmte, glaubte ich jedoch durch zwei Drehwagen ersetzen zu müssen, da sich Pendelamplituden nicht mit genügender Genauigkeit beobachten lassen, und da ausserdem die Pendelfäden, welche möglichst biegsam genommen werden müssen, wenn die Pendelkugeln in der Ruhelage sich wie frei bewegliche Kugeln verhalten sollen, durch den Stoss kaum berechenbare Krümmungen erleiden. Ich werde deshalb zunächst den Stoss zweier Drehwagen auf den Stoss zweier frei beweglichen Kugeln reducieren. Ich habe p. 30 die Voraussetzung eingeführt, dass zwei Massen im Stosse ihre einander gleichen innern Bewegungsgrössen austauschen, auch wenn sie nicht vollkommen elastisch sind. Hierbei war auch die im Stosse latent werdende Bewegungsgrösse als am Austauschprocesse mit beteiligt vorgestellt. Diese Voraussetzung benutze ich in

folgendem nicht; wenn ich von einem Austausch von Bewegungsgrösse im Stosse rede, so denke ich nur an die in sichtbarer Form ausgetauschte.

Das Quantum der in sichtbarer Form ausgetauschten Bewegungsgrösse ist, wenn zwei frei bewegliche Kugeln auf einander stossen, offenbar ausser von den Bewegungszuständen beider Kugeln vor dem Stosse und von der Elasticität (d. i. einer Substanzeigentümlichkeit) nur noch von dem Verhältnis der Massen d. i. derjenigen Grössen abhängig, welche den sich im Stosse vollziehenden Änderungen der Bewegungszustände sich entgegenstemmen. Durch zwei Glaskugeln z. B., welche man an möglichst biegsamen Fäden so aufgehangen und in Bewegung gesetzt hat, dass sie beide in ihrer Ruhelage auf einander prallen, kann man den Stoss frei beweglicher Kugeln darstellen; denn es zeigt sich entsprechend der fast vollkommenen Elasticität des Glases bei centralem Stoss und gleich schweren Kugeln, dass wenn vor dem Stosse eine Kugel ruhte nach dem Stosse die andere, aufstossende fast völlig ruhend in der Stossgegend verharrt.

Denke ich mir nun beide Kugeln an starren aber gewichtslosen Stangen befestigt und lasse die so konstruirten Pendel wieder einen centralen Stoss ausführen, wenn beide die Gleichgewichtslage gerade zu passieren im Begriffe sind, so ist doch durch die Hinzufügung der starren aber gewichtslosen Stangen bei Abstraktion von allen Reibungswiderständen an allen den Bedingungen, von welchen das Quantum der im Stosse ausgetauschten Bewegungsgrösse abhängt, nichts geändert, wenn wir wenigstens annehmen, dass beide Kugeln während der ja nach Versuchen von Schneebeli ausserordentlich kurzen Stossdauer sich so wenig von ihrer Gleichgewichtslage entfernen, dass die in der Wechselwirkung zwischen den beiden Kugeln auftretenden Kräfte keine Componenten nach der Richtung der starren Pendelstangen ergeben, also vollständig zur Geltung kommen. Die idealen Pendel müssen im Stosse dasselbe Quantum Bewegungsgrösse austauschen, gleichviel ob die Pendelstange möglichst starr oder möglichst biegsam ist, denn die Beweglichkeit der Kugeln, der Widerstand gegen eine Änderung des Bewegungszustandes und das Spiel der Elasticitätskräfte im Stosse ist davon unabhängig.

Aus dieser Betrachtung wird leicht die Erwartung entnommen,

dass eine an starrer aber möglichst leichter Pendelstange befestigte sehr schwere Glaskugel, welche in ihrer Ruhelage auf eine gleich schwere und in gleicher Weise als Pendelkugel angebrachte ruhende Glaskugel aufstösst, nach dem Stosse in der Stossgegend fast vollkommen ruhig verharren müsse, während die gestossene Glaskugel die ganze Geschwindigkeit der aufstossenden angenommen habe. Diese Erwartung findet jedoch im Experiment*) keine Bestätigung; denn dasselbe lehrt, dass die aufstossende Glaskugel sich nach dem Stosse noch ungefähr mit der Hälfte der Geschwindigkeit fortbewegt, welche sie im Moment vor dem Stosse erlangt hatte, sie schwingt mit etwas mehr als die Hälfte ihrer früheren Amplitude der gestossenen nach.

Dieses verschiedene Verhalten der mit biegsamer und der mit starrer Pendelstange konstruirten Pendel beweist jedoch nichts gegen den aus obiger Betrachtung gezogenen Schluss, dass in beiden Fällen gleiche Quanta von Bewegungsgrösse ausgetauscht seien, sondern erklärt sich leicht; denn bei der starren Verbindung der Pendelkugel mit dem Drehpunkte geht ein Teil der an das gestossene Pendel abgegebenen Bewegungsgrösse auf die Drehachse des Pendels über und tritt hier ausser Erscheinung, während bei vollkommener Biegsamkeit eine solche Übertragung nicht statthaben kann. So können also zwei Pendel mit gleichem Trägheitsmoment ein gleiches Quantum Bewegungsgrösse mitgeteilt bekommen, gleichen Bewegungsimpuls erfahren, und doch ganz verschiedene Amplituden annehmen. In gleicher Weise hat die aufstossende Pendelkugel an starrer Pendelstange im Stosse das gleiche Quantum Bewegungsgrösse abgegeben, wie das gleichem Stosse ausgesetzte Pendel mit biegsamem Faden; denn beide Pendelkugeln sind ja mit gleicher Kraft auf gleichen Widerstand gestossen. Bei der starren Verbindung der Pendelkugel mit der Drehachse hat dieselbe jedoch an letzterem einen Rückhalt gefunden, welcher im Falle der nicht starren Verbindung mit dem Drehpunkte fehlte. Vermöge der starren Verbindung der Pendelkugel mit der Drehachse hat die letztere ihren Teil der abzugebenden Bewegungsgrösse auf sich genommen, indem sie einen gewissen Druck aushielt, und deshalb hat die Pendelkugel noch Bewegungsgrösse behalten können, mit welcher sie

*) Meines Wissens hat vor mir noch niemand das Experiment angestellt.

über die Gleichgewichtslage hinausschwingt, während die erstere Pendelkugel mit biegsamem Faden ihre ganze Kraft im Stosse aufzehrt.

Der erste Schritt zur genauern experimentellen wie mathematischen Untersuchung des Unterschiedes, welcher sich im Stosse der Pendelkugeln an starren und biegsamen Pendelstangen herausgestellt hat, muss jedenfalls dem Ziele zugerichtet sein, die an der Drehachse der Pendel mit starren Pendelstangen latent werdende Bewegungsgrösse mit in die Erscheinung zu ziehen, also diese Achsen möglichst frei beweglich zu machen. Dies wird erreicht, wenn man die beiden Pendel durch Drehwagen ersetzt, welche an möglichst langen dünnen Fäden aufgehangen sind. Es ist nun leicht ersichtlich, auch 1879 von Weinmeister im Osterprogramm der *Thomasschule* zu *Leipzig* des weitern auseinander gesetzt, dass sich ein um eine beliebige vertikale Achse drehbarer Stab in jedem Moment und in jedem beliebigen Punkt durch eine unendlich kleine Kugel ersetzen lässt, wenn nur das Trägheitsmoment der Kugel in Bezug auf die Rotationsachse dem entsprechenden des Stabes gleich ist, und die Kugel in jedem Moment dieselbe Winkelgeschwindigkeit besitzt wie der Stab. Ich denke mir nun die Drehwagen ersetzt durch je zwei Massenpunkte, welche gleiche Entfernung vom Massenmittelpunkte der durch sie ersetzten Drehwage haben und der soeben angegebenen Bedingung entsprechen. In der zur grössern Übersichtlichkeit an die Spitze der Rechnung gestellten Zusammenstellung der verwendeten Bezeichnungen mögen nun die für die verschiedenen Massen verwendeten Buchstaben gleichzeitig den Punkt bezeichnen, in welchem man sich dieselben angebracht denken muss. Es ist die Voraussetzung festgehalten, dass der Stoss in dem Halbirungspunkte einer zwischen den Aufhängefäden der Drehwage gezogenen Normale oder, was für die Rechnung auf dasselbe hinauskommt, in dem Halbirungspunkte der Verbindungslinie der Massenmittelpunkte beider Drehwagen erfolgt; und der Abstand der zur Ersetzung der Trägheitsmomente der Drehwagen eingeführten Massenpunkte von ihrer Drehaxe soll deshalb stets gleich der Hälfte des Abstandes der Aufhängefäden genommen werden.

Mit 1) und 2) seien die beiden Drehwagen unterschieden und dem entsprechend die für die Trägheitsmomente derselben substituirten Massenpunkte mit resp. μ_1 und μ_2 bezeichnet.

m_1 und m_2 seien die in den Massenmittelpunkten concentrirt gedachten Massen der beiden Drehwagen, und $(m_1 + m_2)$ die Masse der beiden zu einem Massensystem zusammengenommenen Drehwagen, wieder im Massenmittelpunkte concentrirt gedacht.

Der Abstand der beiden Massenmittelpunkte m_1 und m_2 sei mit $2r$ bezeichnet; demnach haben die Massen μ_1 und μ_2 den Abstand r von ihren Rotationsachsen.

Die Abstände der Massen m_1 und m_2 von dem beiden zugehörigen Massenmittelpunkte $(m_1 + m_2)$ seien mit resp. ϱ_1 und ϱ_2 bezeichnet.

φ_1 und φ_2 seien für μ_1 und μ_2, $\varphi^{(1)}_{(1+2)}$, $\varphi^{(2)}_{(1+2)}$ für m_1 und m_2 die Rotationsgeschwindigkeiten um die zugehörigen Achsen.

T_1 und T_2 bezeichnen die Trägheitsmomente der beiden Drehwagen, so dass also: $\mu_1 = \frac{T_1}{2r^2}$, $\mu_2 = \frac{T_2}{2r^2}$ ist.

t_1 und t_2 bezeichnen die resp. Schwingungsdauer, α_1 und α_2 die resp. Amplituden nach dem Stoss, α die Amplitude der Drehwage 1) vor dem Stoss.

φ_1, φ_2 und φ bezeichnen die resp. Winkelgeschwindigkeiten für den Moment des Passierens der Ruhelage. Daraus ergiebt sich der Zusammenhang: $\varphi_1 = \frac{\alpha_1 \pi}{t_1}$, $\varphi_2 = \frac{\alpha_2 \pi}{t_2}$, $\varphi = \frac{\alpha \pi}{t}$.

k bezeichne das Verhältnis der Gewichte beider Drehwagen, so dass $k = m_1 : m_2 > 1$ ist.

dp_1 und dp_2 bezeichnen die Bewegungsgrössen, welche im Zeitelement dt des Stosses den Massen m_1 und m_2 mitgeteilt werden; $d\pi_1$ und $d\pi_2$ die Rotationsmomente, welche diese Bewegungsgrössen dp_1 und dp_2 in Bezug auf $(m_1 + m_2)$ repräsentiren; $d\beta_1$ und $d\beta_2$ dagegen seien die Rotationsmomente, welche im Zeitelement dt des Stosses den Massen μ_1 und μ_2 in Bezug auf resp. m_1 und m_2 mitgeteilt werden. Relationen: $\varrho_1 dp_1 = d\pi_1$, vorausgesetzt, dass dp_1 zu ϱ_1 normal gerichtet ist.

Die beiden Massen μ_1 sowohl wie die beiden Massen μ_2 enthalten, wenn sie das Rotationsmoment resp. $d\beta_1$, $d\beta_2$ erhalten haben, einzeln betrachtet Bewegungsgrössen, welche wie die Kräfte einer Koppel gleich aber entgegengesetzt gerichtet sind. Die ohne Rücksicht auf das Vorzeichen gebildeten Summen der Bewegungsgrössen seien für die beiden Massen μ_1 und für die beiden Massen μ_2 mit resp. db_1 und db_2 bezeichnet, so dass also

der Zusammenhang besteht: $d\beta_1 = r db_1$; $d\beta_2 = r db_2$, vorausgesetzt, dass db normal zu r gerichtet ist.

Rotationsmomente erhalten das +Vorzeichen, wenn sie eine zur Rotation des Uhrzeigers entgegengesetzt gerichtete Rotation erstreben, also eine Rotation von rechts nach links; und der Zusammenhang zwischen den Vorzeichen der Rotationsmomente und den dieselben konstituirenden Kräften wird festgehalten nach der Bestimmung, dass das Vorzeichen von ϱ positiv zu nehmen ist, wenn ϱ, gerechnet vom Drehpunkt nach dem Angriffspunkt der Kraft hin, nach rechts zeigt. Die Richtung des Gesichts folgt der positiven Richtung der Kraft.

In der Tafel Fig. 4 sind möglichst viele Bezeichnungen angebracht.

Zunächst soll noch an der Voraussetzung festgehalten werden, dass beide Drehwagen vollkommen gleich gearbeitet sind, also:

$$\mu_1 = \mu_2, \quad m_1 = m_2; \quad \varrho_1 = \varrho_2 = r \text{ wird.}$$

In einem beliebigen Moment der Stosszeit empfängt die gestossene Drehwage 2) oder die für dieselbe eingeführten Massen μ_2 negative Rotationsmomente zusammen $= -d\beta_2$, und gleichzeitig erhält m_2 ein positives Rotationsmoment $+d\pi_2$. Die Massen μ_1 der aufstossenden Drehwage 1) geben ein positives Rotationsmoment her, was gleichbedeutend ist mit dem Empfange eines negativen Rotationsmomentes $-d\beta_1$; und gleichzeitig empfängt m_1 einen Impuls in negativer Richtung, welcher aus Rücksicht auf die ebenfalls negative Richtung von ϱ ein positives Rotationsmoment $+d\pi_1$ ergiebt. Nach der Voraussetzung, dass man in jedem Moment der Stosszeit den Stoss als in einem Punkte der Verbindungslinie $\overline{m_1 m_2}$ normal zu derselben erfolgend vorstellen solle, werden die *ganzen* Impulse dp_1 und dp_2, welche m_1 und m_2 ebenfalls nach der Richtung von Normalen zur Linie $\overline{m_1 m_2}$ erfahren, zu Rotationsmomenten verwendet, und da ferner

$$dp_1 = -dp_2$$

sein muss, weil die Rotationsmomente der Massen μ_1 und μ_2 die algebraische Bewegungssumme Null enthalten, und durch die Wirkung der innern Kräfte beim Stoss in dem aus beiden Drehwagen gebildeten Massensystem auch nur eine algebraische Bewegungssumme gleich Null ins Leben gerufen sein kann, so folgt mit Berücksichtigung der ferneren Voraussetzung vollkommen

gleichgearbeiteter Drehwagen, weshalb $(m_1 + m_2)$ in den Halbirungspunkt von $\overline{m_1 m_2}$ hineinfällt:

1) $$d\pi_1 = d\pi_2 .$$

Nach dem p. 28 besprochenen Flächensatz, welcher vollkommene Analogie zwischen Bewegungsgrössen und Rotationsmomenten herstellt, folgt noch für die Wirkung des Stosses im betrachteten Zeitelement:

2) $$d\pi_1 + d\pi_2 - d\beta_1 - d\beta_2 = 0 .$$

Wenn ich jetzt noch die beiden Drehwagen 1) und 2) einzeln als Massensysteme I und II betrachte, so folgt, da das System I das Rotationsmoment $-d\beta_1$ hergegeben, das System II das Rotationsmoment $-d\beta_2$ empfangen hat:

3) $$-d\beta_1 = -d\beta_2 .$$

Aus den Gleichungen 1), 2), 3) erhält man aber sofort:

4) $$\begin{cases} d\pi_1 - d\beta_1 = 0 \\ d\pi_2 - d\beta_2 = 0 \quad \text{oder} \end{cases}$$

5) $$\begin{cases} m_1 r^2 \varphi_{(1+2)}^{(1)} = 2\mu_1 r^2 \varphi_1 = T_1 \varphi_1 \\ m_2 r^2 \varphi_{(1+2)}^{(2)} = 2\mu_2 r^2 \varphi_2 = T_2 \varphi_2 . \end{cases}$$

Da beide Drehwagen sich genau gleich verhalten, so will ich 5) mit Weglassung der unterscheidenden Indices weiter behandeln. In der in 5) enthaltenen Gleichung:

6) $$m r^2 \varphi_{(1+2)} = T\varphi$$

habe ich lauter experimentell leicht bestimmbare Grössen, so dass sich dieselbe wenigstens angenähert leicht verificiren lässt. Ferner erhalte ich noch aus 5) durch Division mit r die Gleichung:

$$m r \varphi_{(1+2)} = 2\mu r \varphi \quad \text{oder}$$

7) $$dp = db .$$

Diese Gleichung macht es möglich, den Einfluss der starren Verbindung der für die Drehwagen zu substituirenden Massenpunkte 2μ mit der Drehachse richtig in Rechnung zu bringen; es ist also die Aufgabe der Reduktion des Stosses von Drehwagen unter den angegebenen Bedingungen auf den Stoss frei beweglicher Massen gelöst. Die Einführung von db, der absoluten Summe von Bewegungsdifferentialen glaube ich jedoch noch etwas rechtfertigen zu sollen. Beim Übergange von 5) zu 7), von Rotationsmomenten

zu Bewegungsdifferentialen, habe ich die in der Gleichung $2 \cdot \mu r^2 \varphi = (2\mu) r^2 \varphi$ begründete Licenz, die beiden Massen μ, welche ich erst wegen der Einführung des Massenmittelpunktes beider m als auf entgegengesetzten Seiten der Rotationsachse angebracht, vorstellen musste, in einem Punkte zu vereinen, beibehalten, obgleich bei der Transposition einer Masse μ auf die entgegengesetzte Seite der Rotationsachse das Vorzeichen der Bewegungsgrösse sich ändert. Die algebraische Summe der Bewegungsdifferentiale in $d\beta$ ist ja gleich Null; bei dem einseitigen Stoss der Drehwage hat aber auch die absolute Summe Sinn, da offenbar durch die Einführung dieser nur die Existenz einer starren Verbindung zwischen den Massen μ und die dadurch bedingte direkte Übermittelung des Impulses zum mathematischen Ausdruck gebracht ist.

Ich will jetzt noch die Beschränkung abstreifen, dass beide Drehwagen vollkommen gleich gearbeitet sein müssen. Nach der zu Anfang eingeführten Bezeichnung ist: $k = m_1 : m_2 = \varrho_2 : - \varrho_1$; deshalb wird aus:

$$dp_1 = - dp_2$$

$$\frac{m_1 \varrho_1^2 \varphi^{(1)}_{(1+2)}}{\varrho_1} = - \frac{m_2 \varrho_2^2 \varphi^{(2)}_{(1+2)}}{\varrho_2} \quad \text{oder}$$

$$d\pi_1 = - \frac{\varrho_1}{\varrho_2} \cdot d\pi_2, \text{ d. i.}$$

8) $$k \cdot d\pi_1 = d\pi_2 .$$

8) tritt also an die Stelle von 1). 2) und 3) sind von der Voraussetzung völlig gleicher Drehwagen nicht berührt. Aus 8), 2) und 3) aber ergiebt sich sofort:

9) $$\begin{cases} d\pi_1 \cdot \dfrac{1+k}{2} = d\beta_1 \\ d\pi_2 \cdot \dfrac{1+\frac{1}{k}}{2} = d\beta_2, \quad \text{oder} \end{cases}$$

10) $$\begin{cases} \dfrac{1+k}{2} \cdot m_1 \varrho_1^2 \varphi^{(1)}_{(1+2)} = 2\mu_1 r^2 \varphi_1 = T_1 \varphi_1 \\ \dfrac{1+\frac{1}{k}}{2} \cdot m_2 \varrho_2^2 \varphi^{(2)}_{(1+2)} = 2\mu_2 r^2 \varphi_2 = T_2 \varphi_2 . \end{cases}$$

Um ϱ_1 und ϱ_2 durch r auszudrücken, benutze ich die Gleichungen:

$$\varrho_2 - \varrho_1 = 2r$$
$$\varrho_2 : - \varrho_1 = k,$$

welche ergeben:

11) $$\begin{cases} \varrho_1 = -r\dfrac{2}{1+k} \\ \varrho_2 = r\dfrac{2}{1+\dfrac{1}{k}}. \end{cases}$$

Mit Rücksicht auf 11) erhalte ich aus 10):

12) $$\begin{cases} T_1\varphi_1 = m_1 r v_1 \\ T_2\varphi_2 = m_2 r v_2, \end{cases}$$

wenn ich zur Abkürzung $v_1 = -\varrho_1 \varphi^{(1)}_{(1+2)}$, $v_2 = \varrho_2 \varphi^{(2)}_{(1+2)}$ setze, so dass also v_1 und v_2 die Geschwindigkeiten angeben, welche den resp. Massenmittelpunkten m_1 und m_2 im betrachteten Stossmoment mitgeteilt werden. Diese Gleichungen lassen sich leicht experimentell verificiren.

Aus 10) ist aber ferner noch zu entnehmen, wenn ich in resp. ϱ_1^2 und ϱ_2^2 nur einen Faktor mit Hülfe von 11) durch r ersetze und alsdann mit r dividire:

13) $$\begin{cases} 2\mu_1 r\varphi_1 = m_1(-\varrho_1)\varphi^{(1)}_{(1+2)} = m_1 v_1 \\ 2\mu_2 r\varphi_2 = m_2\varrho_2\varphi^{(2)}_{(1+2)} = m_2 v_2, \end{cases}$$ d. i.

14) $$db = dp;$$ folglich

15) $$b = p;$$

denn was für das beliebige Zeitelement dt des Stosses gilt, muss notwendig auch für die ganze Stosszeit gelten.

Satz. Wenn zwei Drehwagen, während sie grade im Begriffe sind, ihre Ruhelage zu passiren, in einem Halbirungspunkte des Abstandes ihrer Aufhängedrähte mit einer Stossrichtung normal zur Ebene derselben auf einander stossen, so verteilt sich die im Stosse ausgetauschte Bewegungsgrösse zu gleichen Teilen auf Stosspunkt und Massenmittelpunkt.

Zufolge der mehrfach erwähnten Relation $C = 1 - e^2$ brauche ich nur e durch experimentell bestimmbare Data auszudrücken. Die Drehwage 2) empfing in meinen Versuchen den Stoss stets bei möglichst vollkommener Ruhe. Deshalb erhalte ich:

16) $$e = \frac{u - v}{V},$$

wenn ich mit V die Geschwindigkeit des aufstossenden Punktes unmittelbar vor dem Stosse, mit v die Geschwindigkeit desselben

unmittelbar nach dem Stosse und mit u die Geschwindigkeit des gestossenen Punktes unmittelbar nach dem Stosse bezeichne. Die Amplitude der Drehwage 1) ist durch den Stoss von α auf α_1 herabgemindert worden; demnach hat die im Stosspunkt concentrirt gedachte Masse $2\mu_1$ an Bewegungsgrösse abgegeben:

$$b_1 = 2\mu_1 r \frac{\pi}{t_1}(\alpha - \alpha_1).$$

Ebensoviel hat der Massenmittelpunkt m_1 hergegeben; wäre also $2\mu_1$ eine frei bewegliche Masse, so müsste sie einen Verlust an Geschwindigkeit zeigen:

$$= \frac{2r\pi}{t_1}(\alpha - \alpha_1),$$

da alsdann die ganze jetzt von der Drehwage hergegebene Bewegungsgrösse von ihr entnommen wäre. Unmittelbar vor dem Stosse hat $2\mu_1$ die Geschwindigkeit:

$$V = \frac{r\pi\alpha}{t_1}.$$

Demnach ist:

$$v = \frac{r\pi}{t_1}(2\alpha_1 - \alpha).$$

Denkt man sich in gleicher Weise die Masse $2\mu_2$ frei beweglich, so empfängt dieselbe im Stosse die Bewegungsgrösse:

$$b_2 + p_2 = 2b_2 = 2 \cdot 2\mu_2 r \frac{\alpha_2 \pi}{t_2}.$$

Demnach ist:

$$u = \frac{r\pi}{t_2} \cdot 2\alpha_2.$$

Durch Substitution der für V, v, u gefundenen Werte in 16) erhält man nach leichter Vereinfachung:

$$17) \qquad e = \frac{2}{\alpha}\left(\frac{t_1}{t_2}\alpha_2 - \alpha_1\right) + 1.$$

Um die gestossene Drehwage 2) vor dem Stosse in vollkommener Ruhe zu erhalten, schien es mir geboten, dieselbe mit ganz schwacher Torsion sich an einen Holzkeil anlehnen zu lassen, so dass sie also den Stoss nicht genau in der Ruhelage empfing. Die Winkelgeschwindigkeit f', welche die Drehwage in beliebigem Abstande f von ihrer Ruhelage besitzt, ist bestimmt durch:

$$f' = \frac{\pi}{t_2}\sqrt{\alpha_2^2 - f^2},$$

weshalb ich für u eigentlich einsetzen müsste:

$$u = \frac{r\pi}{t_2} 2 \sqrt{\alpha_2^2 - f^2}.$$

Wie eine Probe zeigte, hielt sich jedoch der durch die Vernachlässigung von f^2 gegen α_2^2 bedingte Fehler in meinen Versuchen innerhalb der Fehlergrenze, die ich mir bei der relativen Schwierigkeit der Versuche gefallen lassen muss. Ich habe deshalb e nach der einfachen Formel 17) berechnet, und dann in $C = 1 - e^2$ eingesetzt.

Beschreibung der Versuche. In der Weise, wie es Fig. 1 der Tafel darstellt, dienten zu meinen Versuchen zwei Drehwagen, von denen die eine direkt in der Decke des Zimmers, die andere in einem wagrechten Schlitz einer eisernen Stange verschiebbar befestigt war, so dass der Abstand der Aufhängepunkte den Längen der Drehwagenarme bequem angepasst werden konnte. Um die Ruhelagen in die Ebene der Aufhängedrähte verlegen zu können, waren beide Drehwagen oben mit Torsionskreisen versehen, und zwar oben trotz der dadurch bedingten Unbequemlichkeit, damit durch den Stoss keine Verschiebung derselben bewirkt werden konnte. An den massiven Eisenstangen der beiden Drehwagenarme habe ich je an einem Ende eine Kugel andrehen lassen, um auf diese je zwei mit sphärischen Aushöhlungen und Schraubengewinden versehene Backen aufsetzen zu können, wie Fig. 2 erläutert. Zwischen diesen Backen klemmte ich die Versuchsstücke, Halbkugeln, an welche sich ein längerer flacher Stiel ansetzte, fest ein, nachdem ich bei leicht angezogener Schraube dem eben beschriebenen primitiven Kugelgelenk die für den centralen Stoss richtige Einstellung gegeben hatte. Ich gewann viele Versuchsstücke z. B. von Zinn, Zink, Blei etc. durch Eingiessen des Metalls in die grössten Probirröhren, welche ich auftreiben konnte, erhielt leicht den flachen Stiel mit Hülfe der Säge und die Halbkugelfläche durch etwas Abdrehen und Poliren ohne Stahl. An den Wagebalken, welche genau cylindrisch gearbeitet waren, konnte ich zu jeder Seite des Aufhängepunktes je ein rechtwinkliges Parallelepipedum aus Eisen hin- und herschieben, indem in deren Mitte ein dem Querschnitte des Wagebalkens kongruentes Loch gebohrt war. Da sich das Trägheitsmoment dieser Parallelepipeda so wie der an ihnen fehlenden cylindrischen Stücke leicht berechnet, so dienten sie mir zur Be-

stimmung der Trägheitsmomente für die Drehwagen. Mittels einer Schraube konnten sie an die Wagebalken fest angeklemmt werden, damit sie nicht durch Gleiten während des Stosses störten. Im Interesse des ruhigen Verlaufs der Schwingungen bei möglichst grosser Schwingungsdauer vermehrte ich das Gewicht der an Messingdrähten aufgehängten Drehwagen bedeutend durch Stücke einer starken Bleiröhre, welche ich in der Verlängerung des Aufhängefadens unten an die Drehwage anlötete; und an diese lötete ich noch wieder in der Verlängerung des Aufhängefadens je eine Spitze so, dass sie bis nahe an den resp. Mittelpunkt der Kreisteilungen hinreichten, über welchen die Drehwagen schwangen. Diese Spitzen verrieten, da ich unter ihnen fein karrirtes Papier aufgeklebt hatte, jede kleine Bewegung der Drehwage. Entgegengesetzt dem Ende, an welchem das Versuchstück eingeklemmt war, hatte ich an dem Wagebalken Kupferdrähte befestigt und abwärts gebogen, so dass sie sich über der entsprechenden Kreisteilung bewegten und wegen der Grösse dieser das Ablesen der Amplituden mit genügender Genauigkeit ermöglichten, da ich $^1/_{10}$ Grade noch recht gut schätzen konnte und mich gleichwohl mit der Angabe ganzer Grade begnügte.

Diese Zeigerdrähte liess ich zwischen einem Holzstück und einem Pinsel sich stossen, während ich mit dem Zeigefinger die in der Verlängerung des Aufhängefadens unten an der Drehwage angebrachte Spitze zur Ruhe brachte. Jedoch erkannte ich bald, dass bei der grossen Schwingungsdauer an der gestossenen Drehwage in der Gleichgewichtslage vollkommene Ruhe kaum hergestellt und einige Zeit festgehalten werden konnte; deshalb liess ich den Zeigerdraht derselben sich mit 1^0 Torsion an einen Holzkeil anlehnen. Die Beruhigung der aufstossenden Drehwage wurde gleichfalls durch Anlehnen des Zeigerdrahts an einen Holzkeil erleichtert. Die Ablenkung der aufstossenden Drehwage geschah nämlich mit Hülfe eines kleinen Elektromagnets, welchem zwei schwache Chromsäure-Elemente die gerade nötige Stärke gaben, um ein an dem einen Ende der Drehwage befestigtes Stück Eisenband bei der Torsion der gewünschten Ablenkung festzuhalten. Das Eisenband war etwas aufwärts gebogen, damit nach dem Entmagnetisiren des Elektromagnets die Drehwagen ungestört unter demselben hinschwingen konnten. Um nun zu bewirken, dass sich das Eisenband der abgelenkten Drehwage richtig an

den Elektromagneten anlegte, brachte ich die Drehwage noch vor dem Magnetisiren des Eisenkerns bis auf etwa $^{1}/_{10}{}^{0}$ an die verlangte Ablenkung hinan, hinderte durch Vorschieben eines Holzkeils vor den Zeigerdraht ein Zurückgehen der Drehwage und beruhigte dieselbe in dieser Lage. Da der Elektromagnet nur eben kräftig genug war, um die Drehwage aus dieser kurzen Entfernung heranzuziehen, so legte sich dieselbe so gut wie ohne Stoss an, und weitere Beruhigungsversuche waren so überflüssig als unmöglich, da selbst die vorsichtigste Berührung der Drehwage meist ein Losreissen derselben zur Folge hatte. Ausserdem floss mir aus dem Umstande, dass ich durch Einlegen des Commutators den Magnetismus erst kurz bevor ich den Stoss erfolgen lassen wollte zu erzeugen brauchte, der grosse Vorteil, dass sich in dem weichen Eisenkern des Elektromagnets sowohl, als in dem Stück Eisenband der Drehwage kein bemerkbarer permanenter Magnetismus ausbilden konnte. Nach dem durch Ausheben des Commutators eingeleiteten Stosse waren die Amplituden beider Drehwagen stets so gross, dass die kleinen im Stosse erzeugten Pendelschwingungen das Ablesen derselben nicht wesentlich erschwerten, und es gelang mir auch leicht durch Verminderung des Trägheitsmomentes der gestossenen Drehwage selbst bei sehr wenig elastischen Versuchsstücken den kleinen Nachstoss zu vermeiden, welcher sich anfangs in Folge dieser Pendelschwingungen zeigte.

Mit dieser Vorrichtung experimentirte ich während der letzten Hälfte des Wintersemesters 1878/79, konnte jedoch aus meinen zahlreichen Versuchen mit einiger Sicherheit nur schliessen, dass ein gleicher Bruchteil innerer kinetischer Energie transformirt werde, gleichviel ob ich die Versuchsstücke unmittelbar hinter der Halbkugel oder am Ende des flachen Stiels einklemmte. Die Beobachtung des Einflusses der Stossstärke wurde durch die Unbeständigkeit der Ruhelage unmöglich gemacht. Nachdem nämlich endlich die Verlegung der Ruhelage, welche als Folge der Belastung anzusehen ist, hinlänglich schwach geworden war, so dass sich diese durch Beobachtung vor und nach den Stossversuchen korrigiren liess, trat immer deutlicher eine Abhängigkeit der Ruhelage von der Schwingungsweite zu Tage, so dass ich für grosse Ablenkungen der aufstossenden Drehwage andere Ruhelagen einführen musste als für kleine. Bei einer Abnahme der

Amplitude von 236° bis 30° beobachtete ich eine Wanderung der Ruhelage um 7,1° in entgegengesetztem Sinne zu der durch die dauernde Belastung noch bestehenden Wanderung, so dass ich die frühere Ruhelage wieder beobachtete, wenn ich die Amplitude wieder vergrösserte. Diese seltsame Wanderung der Ruhelage habe ich deshalb im Zusammenhange mit den bekannten Änderungen des logarithmischen Decrements näher untersucht.*)

Wenn ich nun auch mit Berücksichtigung der Abhängigkeit der Ruhelage von der Amplitude, indem ich zu jeder Ablenkung die zugehörige Ruhelage vorher bestimmte, in den Werten für *e* Übereinstimmung bis incl. die erste Decimale erzielte, so hielt ich doch eine Wiederholung meiner Versuche mit möglichster Vermeidung dieser Komplication für geboten, da der Einfluss des Stosses auf die Ruhelage unkontrollirbar blieb. In den Sommerferien dieses Jahres (1880) ersetzte ich deshalb die Messingdrähte, deren ich mich früher zur Aufhängung bediente, durch Stahldrähte; ausserdem änderte ich die Einstellung der Versuchsstücke, indem ich das primitive Kugelgelenk durch ein Scharnier mit möglichst breiten Backen ersetzte, eine etwa notwendige stets äusserst geringe Drehung um die Achse des Wagebalkens aber an einem feinen Schraubengewinde bewerkstelligte, wie Fig. 3 zeigt. Die Schraube war bei sehr nahe richtiger Lage der Versuchsstücke fest angezogen.

In der Zwischenzeit hatte ich die Möglichkeit einer experimentellen Kontrolle für die zur Ausrechnung der Versuche verwendete Formel nach Gleichung 12) p. 45 bemerkt. Da mir nun zu dieser Kontrolle grössere Pendelschwingungen der Drehwage 2) erwünscht waren, um dieselbe über einer Elfenbeinteilung mit einiger Genauigkeit bestimmen zu können, so entfernte ich das schwere Stück Bleiröhre unten von der Drehwage. Die Pendelschwingungen wurden dadurch so sehr vergrössert, dass ich den zweiten Stoss nicht anders als durch Abfangen einer der beiden Drehwagen gleich nach dem ersten Stoss verhindern konnte. Die Dauer der Pendelschwingungen war jedoch hinreichend gross, so dass dies Abfangen einer der beiden Drehwagen zwischen dem ersten und zweiten Stoss bequem ausgeführt werden konnte; der einzige Nachteil bestand also in der Verdoppelung der zu einer

*) S. Osterprogramm des Zwickauer Gymnasiums. 1881. Über die Wanderungen der Ruhelage einer unifilar aufgehängten Drehwage vom Verf.

Versuchsreihe nötigen Stösse von 10 auf 20. Für Zink habe ich 6 Beobachtungsreihen zu je 20 Stössen angefertigt; in denselben gehen die Schwankungen in den beobachteten Amplituden bis zu 2°. Für Kupfer habe ich nur drei Beobachtungsreihen machen können.

Folgende Werte sind die Mittel aus den einzelnen Reihen; e ist berechnet nach: $e = 1 - \frac{2}{\alpha}\left(\alpha_1 - \frac{t_1}{t_2}\alpha_2\right)$.

Zink.

α	α_1	α_2	e
45	42,5	13,5	0,7067
45	42,6	13,5	0,7022
90	82,0	25,7	0,6954
90	82,2	25,8	0,6978
160	141,4	44,3	0,7050
160	141,2	44,1	0,7012
		Mittel:	0,7010

$$C = 1 - e^2 = 0{,}5086.$$

Kupfer.

α	α_1	α_2	e
40	41,2	13,1	0,6800
86	78,4	24,2	0,6745
156	139,8	45,5	0,6965
		Mittel:	0,6837

$$C = 1 - e^2 = 0{,}5324.$$

Die Kontrollformel $T_2\varphi_2 = m_2 r v_2$ formt sich leicht um in:

$$T_2 = m_2 r \frac{t_2 \tau g}{\pi^2} \cdot \frac{a}{\alpha_2}.$$

Hierin ist mit a die Amplitude, mit τ die Dauer der Pendelschwingung und mit g die Gravitationskonstante bezeichnet. In 6 Versuchsreihen zu je 10 Stössen habe ich a und α_2 bestimmt und gefunden:

	α_2	a	$\alpha_2 : a$
Zn.	25,7	1,9	13,5
	43,3	3,3	13,1
	13,6	0,9	15,1
Cu.	24,2	1,9	12,7
	13,1	0,9	14,6
	45,5	3,4	13,4
		Mittel:	13,7.

Durch direkte Bestimmung fand ich:

$$T_2 = 735500000^{gr\,(mm)^2}.$$

Die Rechnung ergiebt:

$$T_2 = 847300000^{gr\,(mm)^2}.$$

In dieser Berechnung habe ich für a das Mittel derjenigen Werte genommen, welche ich mittels der über einer Elfenbeinskala sich bewegenden Spitze abgelesen habe, während a eigentlich auf den Schwingungsmittelpunkt reducirt werden muss. Der Abstand des Schwingungsmittelpunktes vom Aufhängepunkte berechnet sich aus der Dauer der Pendelschwingungen zu 2875^{mm}, den Abstand des Schwingungsmittelpunktes von der Elfenbeinskala muss ich mich jedoch begnügen nachträglich auf 150^{mm} zu schätzen, da ich den Abstand des Aufhängepunktes von der Skala zu messen verabsäumt habe. Auf Grund dieser Data ist a durch den Faktor 23 : 24 zu korrigiren, und alsdann ergiebt sich:

$$T_2 = 811900000^{gr\,(mm)^2}.$$

Auch jetzt ist noch die Differenz in den Werten für T_2 ziemlich bedeutend; hierfür liegt vermutlich der Grund in einer Neigung auf der Elfenbeinskala zu grosse Elongationen der über derselben schwingenden Spitze abzulesen. Es genügt zur Erzeugung obiger Differenz, dass ich an der nicht übermässig feinen Spitze beim Ablesen den von der Ruhelage abgewendeten Rand etwas bevorzugte, worauf ich mich allerdings nicht besinne.

In obigem sind die Versuche, welche ich in den Sommerferien 1880 angestellt habe, *vollständig* gegeben. Ich wünsche nur, dass jemandem die Korrektur und Kompletirung wünschenswert erscheinen möge. Die von mir im Wintersemester 1878/79 angestellten Versuche glaube ich aber vollständig weglassen zu sollen, besonders da denselben wegen der Wanderung der Ruhelage mit einer Interpretation schwer beizukommen ist.

Aber auch bei den angegebenen Versuchen muss ich noch zwei Ungenauigkeiten erwähnen. Um zu bewirken, dass die gestossene Drehwage den Stoss bei vollkommener Ruhe empfange, musste ich dieselbe mit 1^0 Torsion sich anlehnen lassen. Dies ist bei der Ausrechnung nicht berücksichtigt. Eine Berücksichtigung dieses Umstandes nach der auf p. 47 gegebenen Formel ergab allerdings nur eine Änderung innerhalb der Fehlergrenze im Sinne einer Erhöhung des Wertes von e. Die Korrektur nach

p. 47 ist aber eine unvollständige, da in derselben nicht berücksichtigt ist, dass in Folge der durch die Torsion vermehrten Widerstandsfähigkeit gegen die Änderung des Bewegungszustandes auch ein grösseres Quantum Bewegungsgrösse abgegeben werden muss. Ich muss mich begnügen anzunehmen, dass wegen der Geringfügigkeit der Torsion der Fehler ein geringer sein werde. Vielleicht aber hat dies doch auch mit beigetragen, dass sich bei der Berechnung für T_2 ein zu grosser Wert ergab. Bei einer Wiederholung meiner Versuche dürfte es dieses bei unifilarer Aufhängung unvermeidlichen Fehlers wegen geboten sein, eine bifilare Aufhängung zu wählen. Zweitens habe ich unterlassen, die Amplituden nach dem log. Decr. zu korrigiren, da das log. Decr. bei meinen Stahldrähten ein sehr geringes war und zudem gerade während ich meine Versuche anstellte — bald nach Aufhängung der Drehwagen —, das log. Decr. in rascher Abnahme begriffen, also nicht konstant war, was die Berücksichtigung desselben unvergleichlich erschwerte. Auch diese Korrektur müsste den Wert von e um etwas erhöhen. Sorgfältigere Versuche mit bessern Hülfsmitteln dürften also einen etwas kleinern Wert für C ergeben; aber ich glaube doch durch meine Versuche bestätigt zu sehen, was zuvor allgemeine Betrachtungen ergaben, dass nämlich C wirklich als Konstante eine Substanzeigentümlichkeit bestimmt charakterisirt.
